EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11 Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-130785 en 050-132925.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,— en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

Teaching by Exception

L. WEIDE
Delft

Verslag van de ontwikkeling in de praktijk van een systeem voor eerste opzet en vervolgens permanente uitbouw en optimalisering van individueel gericht onderwijs in heterogene groepen.

INLEIDING

De hier beschreven methode is gedurende de cursus 70/71 ontwikkeld binnen het kader van de door de schrijver gegeven wiskundelessen in tweede klassen van een scholengemeenschap met 3-jarige brugperiode.

Opzet brugperiode

De opzet van deze brugperiode was als volgt:
Gedurende de 3 jaren fungeren de parallelklassen als niveaugroepen.
Aan het begin van de brugperiode worden de leerlingen willekeurig verdeeld over de te vormen parallelklassen. Al deze klassen gaan vervolgens aan het werk op basis van een (voor zover mogelijk) uniform lesrooster.
Maandelijks worden rapporten opgemaakt.
Afhankelijk van de gerapporteerde prestaties worden leerlingen per vak overgeplaatst naar hogere of lagere niveaugroepen.
In principe is het dus mogelijk, dat een leerling voor bijvoorbeeld wiskunde in een steeds zwakkere groep komt te zitten en tegelijkertijd voor moderne talen in een steeds sterkere groep.

Verwachting

De verwachting van de hier geschetste opzet was, dat zich tegen het eind van de brugperiode een natuurlijke selectie zou aftekenen in VWO, HAVO en MAVO 4. MAVO 3 zou uiteraard al eerder afgesplitst moeten worden voor een gerichte examenvoorbereiding.

Problemen

Praktijkervaringen in de staartgroepen van 1e, 2e en 3e klas brachten echter een aantal problemen aan het licht, die ernstig aan de gestelde verwachtingen deden twijfelen.

Aansluiting niveaugroepen

Zoals beschreven kan een leerling voor een bepaald vak via voortdurend slechte rapportcijfers afzakken van de hoogste tot de laagste niveaugroep.
Theoretisch moet ook de omgekeerde ontwikkeling kunnen plaatsvinden. Gezien echter de systematische concentratie van 'moeilijke gevallen' in de zwakkere parallelklassen, ligt het klassikale tempo en/of niveau daar ook evenredig (en vaak meer dan dat) lager, waardoor de aansluiting aan betere groepen even systematisch wordt bemoeilijkt.

Aanpassing

Het overgeplaatst worden van de ene naar de andere groep heeft mede tot gevolg, dat het slachtoffer constant met aanpassingsmoeilijkheden heeft te kampen, zowel ten aanzien van nieuwe klasgenoten als ten aanzien van de nieuwe leraar.
Anderzijds maakt het geconstateerde verschil in tempo van de parallelklassen het noodzakelijk, om twijfelgevallen toch zo snel mogelijk te laten opschuiven naar een snellere groep, met de kwade kans dat de aansluiting aan de stof niet lukt door aanpassingsproblemen met de nieuwe omgeving.

Steunlessen

Om organisatorische redenen worden steunlessen veelal door andere leraren gegeven, dan door de voor de leerlingen 'normale' vakkracht. Door de vaak zeer persoonlijke didactische aanpak van de verschillende leraren, worden hierdoor de problemen van steunbehoevende leerlingen zo mogelijk nog vergroot in plaats van verkleind.
Dit geldt vooral, waar de steunlessen niet selectief aan individuele leerlingen worden gegeven, maar aan hele klassen tegelijk.

Ouderhulp

Naast de inefficiënte steunlessen doet zich bij wiskunde nog het extra probleem voor, dat de stof erg veranderd lijkt. Hierdoor menen de meeste ouders niet meer in staat te zijn eventueel hulp bij huiswerk te kunnen bieden.
Op de onderhavige school werd dan ook serieus gepraat over instructie aan belangstellende ouders!

ACTIE

In bovenbeschreven situatie is door schrijver een poging ondernomen, om de werkelijkheid iets meer in overeenstemming te brengen met de oorspronkelijke opzet.

Doelen

Hierbij zijn de volgende doelen gesteld:
1 iedere leerling moet maximale gelegenheid krijgen om in eigen tempo zo efficient mogelijk te werken, zonder steeds te hoeven wachten op (nog) langzamer klasgenootjes.
2 snelle leerlingen moeten nog in de oude groep een voorsprong op de nieuwe groep kunnen opbouwen, zodat aanpassingsproblemen niet direct fataal zijn voor een promotie.
3 de didactische aanpak moet meer expliciet worden, zodat verschillende leraren elkaars werk effectiever kunnen voortzetten, zoals voor de steunlessen wenselijk is.
4 nieuwe stof dient zo veel mogelijk op school te worden verwerkt onder

didactische begeleiding van de docent. De overigens zeer gewenste steun van ouders zou dan kunnen worden aangewend in de zin van een meer algemene pedagogische begeleiding van hun kinderen, zoals het stimuleren tot thuis nog eens overkijken van op school gemaakt werk.

Randvoorwaarde

Randvoorwaarde bij dit alles was, dat een en ander diende te worden gerealiseerd tegen minimale kosten en binnen de beschikbare tijd van de schrijver.

IDEEVORMING

Bij inventarisering van de mogelijke wegen, die tot de gestelde doelen zouden kunnen leiden, is een vergelijking gemaakt tussen gebruikelijke technieken in het onderwijs en die in vergelijkbare situaties in het bedrijfsleven.

Onderwijs

Als een van de meest geavanceerde middelen om het onderwijsproces te besturen is er momentel de geprogrammeerde instructie, al dan niet vertakt en met of zonder computerbesturing.
Deze instructies zijn gewoonlijk opgezet als gesloten systeem. Dat wil zeggen: Voor een min of (meestal) meer beperkt leerdoel wordt een leerprogramma ontwikkeld met in principe voor elke potentiële moeilijkheid van de voorziene gebruikers een remedie.
Na afsluiting van deze ontwikkelingsfase wordt het programma gedistribueerd over de leerlingen, die zich vervolgens op eigen gelegenheid door de stof heen werken.
Aangezien bij een dergelijke opzet verreweg de meeste tijd wordt besteed aan het ontwikkelen van remedies, die achteraf relatief weinig toegepast worden, groeit het aantal geprogrammeerde instructies tergend langzaam.
Tegelijkertijd moeten die leerstofeenheden die nog niet geprogrammeerd zijn, op de gebruikelijke wijze behandeld worden.

Bedrijfsleven

De bovenbeschreven partiële aanpak komt voor de besturing van produktieprocessen niet in aanmerking. Waar namelijk in het (conventionele) onderwijs eventuele procesfouten nog kunnen worden afgewenteld op het produkt, daar komen ze in het bedrijfsleven gewoonlijk voor rekening van de producent.

Management by Exception

Vanuit deze situate zijn dan ook andere technieken ontwikkeld, waarvan het vrij recente *Management by Exception* wel een van de fraaiste voorbeelden vormt. Deze techniek is gebaseerd op de zogenaamde 20-80 regel van de econoom Pareto, volgens welke de meeste processen voor 80% gerund kunnen worden met 20% van de

totale inspanning. De overige 80% inspanning wordt dan besteed aan voorzieningen die de goede afloop van de laatste 20% van het proces moeten verzekeren. Toegepast op de programmering van produktieprocessen tracht men nu programma's te maken, die globaal voor 80% correct uitvoerbaar zijn. De laatste 20% tracht men dan niet via het programma, maar via incidenteel ingrijpen in goede banen te leiden. Hiertoe worden voor de verschillende échelons in een bedrijf van hoog naar laag steeds gedetailleerder programma's opgesteld, waarvan de realisering in principe door die échelons zelf geverifiëerd dient te worden. Alleen afwijkingen worden doorgegeven aan het naasthogere échelon, dat daar dan al of niet zelf op reageert: direct met ad hoc maatregelen om de afwijking alsnog ongedaan te maken, indirect door de opgedane ervaringen terug te koppelen op de programmering van volgende processen. De nadruk in deze vorm van *management* komt zo dus te liggen op de programmering. Hoe beter deze almaar wordt, hoe meer direct ingrijpen tot de *uitzondering* gaat behoren.
In tegenstelling tot de geprogrammeerde instructies functioneren de hier besproken programma's als open systeem. Er is een onafgebroken terugkoppeling van de met de programma's opgedane ervaringen, waardoor deze programma's voortdurend kunnen worden uitgebreid en verfijnd.

Conclusie

Mede gezien de geldende randvoorwaarden is gekozen voor een aanpak, analoog aan die van Management by Exception onder de naam *'Teaching by Exception'.* Hierbij is uitgegaan van het aanwezige leerboek. Daar op aansluitend is een programma gemaakt, aan de hand waarvan de leerlingen het boek kunnen doorwerken en zich zelf kunnen controleren. De opzet van dit programma is zodanig, dat zowel basisprogramma als later aan te brengen wijzigingen en/of uitbreidingen met minimale kosten en moeite kunnen worden gerealiseerd.

Literatuur

Kay, H., Dodd, B., Sime, M., Teaching Machines and Programed Instruction, Pelican 1968.
Machol, R. E., ed., System Engineering Handbook, London, Mc Graw Hill 1965.

VORMGEVING

Programmakaartjes

De kern van het systeem wordt gevormd door in de handel verkrijgbare systeemkaartjes van 8 x 13 cm. Op de voorkant van elk kaartje staat een opdracht, meestal een rechtstreekse verwijzing naar een opdracht uit het boek. Indien de opdracht uit het boek niet operationeel genoeg is, dan wordt deze door een aantal vragen (op idem zoveel kaartjes) operationeel gemaakt.
Op de achterkant van elk kaartje staat het antwoord op de vraag van de voorkant.

Gebruik

Iedere leerling heeft een speciaal kaartenstandertje op zijn tafel, met daarin een aantal kaarten met de voorkant naar hem toe. De opdracht op het voorliggende kaartje wordt uitgevoerd. Vervolgens wordt het kaartje omgedraaid en afgelegd. De juiste oplossing ligt nu boven en kan worden vergeleken met de eigen oplossing. Bij een positief resultaat wordt verwezen naar een volgende opdracht. Hiertoe is elk kaartje genummerd volgens een systeem, dat nauw aansluit bij het boek (bijv. III-8.1-7.3 = boek III, paragraaf 8.1, opdracht 7, kaartje 3).
Bij een negatief resultaat wordt verwezen naar de leraar of naar een andere opdracht, welke dan veelal het begin vormt van een reeks partiële opdrachtjes, die samen toch tot de oplossing van het oorspronkelijke probleem leiden.

Routing

In de klas werkt het systeem als volgt: Er is één verzameling kaartjes. De leerlingen zitten in volgorde van de snelheid waarmee ze blijken te werken. De snelste leerling heeft de centrale kaartenbak voor zich.
Zodra een leerling door zijn kaartjes heen is, krijgt hij de afgewerkte kaartjes van zijn voorbuurman.
Blijkt een leerling voortdurend op zijn voorganger te moeten wachten, dan wisselen ze van plaats.

Aan- en uitloop

Aan het eind van een les legt iedere leerling een speciaal naamkaartje op de laatste opdracht waaraan hij bezig was. Vervolgens worden de stapeltjes kaarten weer verzameld in de centrale kaartenbak. Aan de hand van de naamkaartjes kunnen de opdrachtkaartjes snel weer worden gedistribueerd aan het begin van de volgende les.

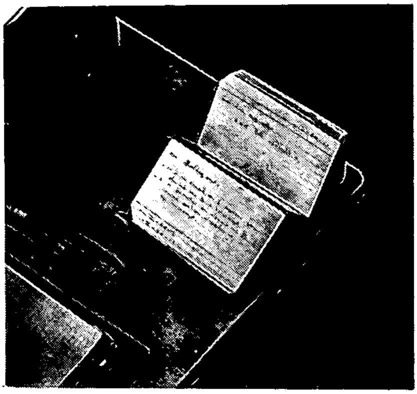
Kwantitatieve controle

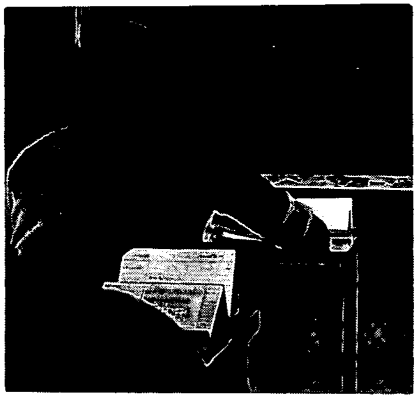
De genoemde naamkaartjes geven de leraar buiten de lestijden een duidelijk overzicht van de kwantitatieve prestaties van zijn leerlingen.
Op basis hiervan kan hij te trage leerlingen oproepen voor extra steunlessen. Uiteraard kan hij ook proberen om te snelle leerlingen op verantwoorde wijze een uurtje elders onder te brengen. Zo mogelijk bij een zwak vak in overleg met de desbetreffende docent(e), anders in de bibliotheek of desnoods eerder naar huis.

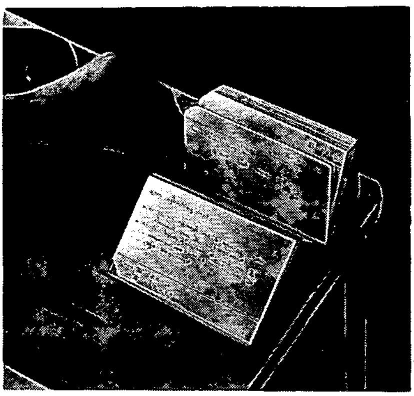
Kwalitatieve controle

Een leerling, die door een hoofdstuk heen is, maakt een toets over de desbetreffende stof. Voorzover geen CITO-toetsen beschikbaar zijn, bestaan deze toetsen uit selecties van de moeilijkste problemen uit het hoofdstuk.
Wordt de toets voldoende gemaakt, dan kan de leerling verder gaan met een volgend hoofdstuk. Indien de toets onvoldoende wordt gemaakt, dan dient de stof

nog eens te worden bestudeerd onder frequente controle van de docent ('leren leren').









EVALUATIE

Vorderingen

Ten aanzien van het primaire doel is gebleken, dat in de zwakste parallelklas ongeveer een derde van de leerlingen een prestatieniveau heeft ontwikkeld, waarmee het HAVO-programma zou kunnen worden gevolgd. Dit dan met dien verstande, dat er geen huiswerk wordt gemaakt, maar alles op school onder direct toezicht en eventuele assistentie van de leraar wordt verwerkt. Van de rest volgt ongeveer de helft op MAVO 4-niveau terwijl de rest dit peil niet helemaal tot helemaal niet

Enkele tot dan minder opvallende leerlingen hebben zich reeds in het begin onverwacht sterk weten op te werken. Van hun tegenpolen zijn er een aantal pas laat op gang gekomen, met name toen een collega van schrijver tijdens steunlessen verder ging werken met het systeem.

Vergelijking andere klassen

Bij gebrek aan coördinatietoetsen is het helaas niet mogelijk de resultaten van het hier beschreven systeem in kwantitatieve zin te vergelijken met die in de overige twee klassen.
Twee koplopers, die medio februari zijn gepromoveerd hebben hun overstap kunnen maken met een kleine voorsprong in de stof. Zij hebben zich in de nieuwe groep goed weten te handhaven.
Aan het eind van het cursusjaar had zich een kopgroep van 6 leerlingen gevormd, welke alle op de nominatie stonden om volgende cursus in een hogere groep te starten.

Optimalisering

Met betrekking tot een permanente optimalisering blijkt de gevolgde programmeerwijze goed te voldoen. Enkele struikelpunten zijn verwijderd en nieuwe vragen zijn ingelast, één en ander naar inzicht van de docent.
Ook zijn op het formaat van de kaartjes tekenmallen en dergelijke toegevoegd voor optimale figuren bij meetkunde. Voor uitgebreider hulpmiddelen als bijvoorbeeld draadmodellen wordt via normale opdrachtkaartjes verwezen naar de plaats waar deze zich bevinden.

VOORTZETTING

Via oriënterende besprekingen in het kader van de hiervoor beschreven ontwikkeling is contact tot stand gekomen met de uitgever van het boek, waarop de programmering was gebaseerd.

Beweegredenen

Enerzijds was het namelijk een onplezierig vooruitzicht, dat er wel eens een (sterk) afwijkende nieuwe druk van het boek zou kunnen verschijnen, waardoor het opgebouwde programma onbruikbaar zou worden.
Anderzijds zou het misschien mogelijk zijn, om via het ontwikkelde systeem een intensieve en doelgerichte feed-back op het boek te organiseren, waardoor eventuele wijzigingen hiervan van te voren op doeltreffendheid en/of doelmatigheid zouden kunnen worden getoetst.

Afloop

Vanuit deze laatste overweging zijn ongeveer 25 proefsetjes gedrukt van een inleidend programma bij het eerste boek, welke eind augustus '71 zijn toegezonden aan mogelijk belangstellende leraren en de Pedagogische Centra. Gelijktijdig was schrijver op een nieuwe school gestart met de verdere programmering van de eerste klas stof.
De resultaten van de proefsetjes, gekoppeld aan de dreigende herdruk van het

eerste boek, hebben schrijver doen besluiten zijn activiteiten in het kader van Teaching by Exception eind 1971 te staken en om te schakelen op klassikaal onderwijs.

Beoordeling leerlingen

Ongeveer drie maanden na deze omschakeling hebben 42 van de betrokken leerlingen hun bevindingen ten aanzien van de twee onderwijsvormen schriftelijk weergegeven. Dit is, na mondelinge toelichting van de docent, gedaan in losse zinnen van de vorm: voor/tegen kaartjes/klassikaal omdat . . . .

De meest genoemde aspecten zijn samengevat in onderstaande tabel. Van overeenkomstige oordelen (voor klassikaal om reden x, tegen kaartjes om zelfde reden x) is in deze telling steeds alleen de eerstgenoemde meegeteld.

aspect	klassikaal		kaartjes	
	+	−	+	−
vorderingen kwantitatief	1	14	9	
vorderingen kwalitatief	1	1	4	1
werktempo			29	
werksfeer		11	11	
uitleg stof	8		5	
feed-back			14	9
huiswerk			13	
gelijk opwerken	9			
inhalen na ziekte			5	
te weinig directe hulp				3
gevolgen van slechts één set kaartjes (opjagen, wachten, wisselen)				20

N = 42

Commentaar

De negatieve beoordelingen van kaartjes ten aanzien van de feed-back komen vooral voort uit de mogelijkheid tot 'afkijken'. Desgevraagd bleken de leerlingen, die dit aspect noemden, deze mogelijkheid vooral voor anderen te zien.
Overigens is door schrijver steeds en met nadruk geadviseerd om bij onduidelijke vragen eerst naar het antwoord te kijken.

Ten aanzien van de verzamelde aspecten opjagen, wachten en wisselen welke voortkomen uit het werken met slechts één set kaartjes, kan worden opgemerkt dat deze voor 1e klassers aanzienlijk zwaarder wegen dan voor 2e klassers.
Daarnaast hadden zich in de loop van de periode spontaan enkele groepjes van 4 leerlingen gevormd, die gelijk opwerkten. Vooral in deze 'grote' groepen werd het als hinderlijk ervaren, dat er maar één set was.

Meer sets

Naar schatting zouden genoemde bezwaren voldoende ondervangen kunnen worden, door per klas met 4 à 5 sets te werken.

- Samenwerkende leerlingen kunnen dan hun kaartjes uit verschillende sets betrekken, en zo in eigen tempo toch gelijk opwerken.
- Bij gelijke totaalspreiding worden de vorderingsverschillen tussen opvolgende leerlingen eveneens 4 à 5 keer zo groot, waardoor er minder gewacht en/of gewisseld hoeft te worden.
- Directe assistenties door de docent kunnen aan meer leerlingen tegelijk worden gegeven, in plaats van na elkaar.

Feed-back op programma

Tegen het eind van de tweede periode is voor de feed-back op het programma een formulier ingevoerd, waarop de leerlingen eventueel hun ervaringen met bepaalde programmastappen konden weergeven.
Hierbij moest het nummer van de desbetreffende stap worden opgeschreven en één van de kolommen: / overgeslagen / fout gemaakt / eerst antwoord gezien / hulp gevraagd /, worden aangekruist.
Aanleiding tot deze vorm van feed-back was het feit, dat enerzijds het krijgen van deze informatie een elementaire voorwaarde is voor de ontwikkeling van het curriculum en bovendien het (kunnen) geven van deze informatie een duidelijk motiverend effect leek te hebben op de leerlingen. Anderzijds bleek het voor de zwakkere leerlingen tamelijk frustrerend om de door hen gevraagde hulp steeds onderbroken te zien door al dan niet korte vragen en/of opmerkingen van medeleerlingen.
Hoewel de ervaring met deze vorm van rapportering slechts beperkt is geweest, is toch de indruk gewekt dat het de werking van het systeem in zijn geheel zeer ten goede komt.

NABESCHOUWING

Mogelijkheden

Hoewel het hier beschreven systeem is ontwikkeld aan de hand van het vak wiskunde, komt het schrijver voor dat het in principe voor vrijwel alle cursorische onderwijs met vrucht zou kunnen worden toegepast.

In de breedte

Voor een integrale aanpak valt te denken aan het per vakgebied en/of favoriete methode organiseren van teams van 10 . . . 20 leraren, waarbij ieder teamlid een deel van de leerstof programmeert. Door deze deelprogramma's centraal te copiëren en over alle leden van een team te distribueren, kan met betrekkelijk weinig moeite en kosten per vak een basisprogramma tot stand worden gebracht.

Aan de hand van de gebruikservaringen kunnen door de deelnemende leraren wijzigingen en/of uitbreidingen worden geschreven, welke op dezelfde manier als bij het basisprogramma aan de andere teamleden ter hand kunnen worden gesteld. Na verloop van 3 . . . 5 jaar zou een volgens boven geschetste werkwijze ontwikkeld systeem verder kunnen worden gedistribueerd voor toepassing op grote schaal.

In de diepte

Ook in deze fase blijft het uiteraard mogelijk om wijzigingen en (vooral) uitbreidingen aan te brengen, zowel door het oorspronkelijke team leraren, als door nieuwe gebruikers. Met name valt hier te denken aan het diversificeren van het basisprogramma voor groepen verschillend gepredisponeerde leerlingen.
Verder zouden de basisprogramma's kunnen worden uitgebreid met korte audiovisuele instructies, in de vorm van dia's + audio-cassette, waarbij de leerling zelf op instructie van de cassetterecorder de diaprojector kan bedienen. De hiervoor benodigde apparatuur kan (afhankelijk van de te stellen eisen) reeds voor minder dan f300,– worden aangeschaft.
De leerlingen kunnen op verwijzing van het programma, individueel of in groepjes gebruik maken van deze apparatuur. In eerste instantie zal kunnen worden volstaan met één zo'n 'leerstation', eventueel voor meerdere klassen tegelijk. Afhankelijk van het aanbod van nieuwe AV instructies kan de beschikbare apparatuur geleidelijk aan worden uitgebreid.
Voor de exacte vakken kunnen verder experimenten worden ingelast, welke al dan niet onder toezicht van hulppersoneel kunnen worden uitgevoerd. Ook hierbij kan alle benodigde apparatuur eerst in enkelvoud worden aangeschaft en/of vervaardigd.

Binnen de school

Voorzover dit uit het voorgaande nog niet zou zijn gebleken, moge er hier nogmaals met klem op worden gewezen, dat het bepaald niet de bedoeling is om te pleiten voor het vervangen van leraren door kaartenbakken. Het is de stellige mening van schrijver, dat het directe contact tussen leraar en leerling wel altijd het meest waardevolle element in de *opvoeding* zal blijven. Het hier beschrevene wil er dan ook in de eerste plaats toe bijdragen om dit directe contact te behouden en waar mogelijk zelfs uit te breiden. Hiertoe zou kunnen worden gedacht aan een toekomstige schoolorganisatie, waarbij voor het cursorische werk bijvoorbeeld 1 leraar toezicht houdt op zeg 100 leerlingen, terwijl de daardoor vrijkomende leraren kleine groepjes leerlingen assisteren bij projecten, discussies, uitspraakoefeningen en dergelijke activiteiten.

In zijn algemeenheid bevat een dergelijk toekomstbeeld ongetwijfeld weinig nieuws. Het hier beschreven systeem pretendeert dan ook allerminst nieuwe pedagogische of didactische inzichten te hebben willen ontwikkelen of uitdragen.
Liever dient het te worden gezien als een bescheiden poging om een aantal bestaande en soms zelfs als gemeengoed te beschouwen inzichten gestalte te geven in een hanteerbaar systeem.

Differentiaalvergelijkingen of differentiaalachtige vergelijkingen?

H. J. K. MOET en P. TERLOUW*

0 *Inleiding*

Naar aanleiding van het eindrapport van de Nomenclatuurcommissie (NC), dat verschenen is in Euclides, jg. 48, blz. 241-274, willen wij enige opmerkingen plaatsen m.b.t. de differentiaalvergelijkingen. Alvorens daartoe over te gaan stellen we vast, dat het streven van de NC naar eenheid op het gebied van de nomenclatuur een lofwaardig streven is en dat wij van mening zijn dat de NC op vele gebieden van de middelbare schoolwiskunde goed werk aflevert, echter de uitzondering bevestigt de regel en voor ons vormt zo'n uitzondering de differentiaalvergelijkingen.

1 *Wat is een differentiaalvergelijking?*

De NC stuit op twee vrij moeilijke problemen, we citeren:

'a) hoe noteren we bij voorkeur een differentiaalvergelijking?

b) wat verstaan we onder het oplossen van een differentiaalvergelijking? '

Blijkbaar vindt de NC geen moeilijkheden in de vraag 'Wat is een differentiaalvergelijking? ' hetgeen toch een principieel probleem genoemd mag worden. Voor een goed definitie citeren we W. Hurewicz, Lectures on Ordinary Differential Equations:

'By a domain D in the plane we understand a connected open set of points; by a closed domain or region $\overline{D}$, such a set plus its boundary points. The most general differential equation of the first order in one unknown function is $F(x, y, y') = 0$. Where F is a single-valued function in some domain of its arguments. A differentiable function $y(x)$ is a solution if for some interval of x, $(x, y(x), y'(x))$ is in the domain of definition of F and if further $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

We shall in general assume that $F(x, y, y') = 0$ may be written in the normal form: $y' = f(x, y)$ where $f(x, y)$ is continuous function of both its arguments simultaneously in some domain D of the x-y plane.'

Wij maken de lezer erop attent dat hier onder een functie f wordt verstaan een deelverzameling van het cartesisch produkt van twee verzamelingen X en Y (X x

* Beide student aan de TH-Delft.

Y), zodanig dat aan iedere x behorende tot X op eenduidige wijze een element y behorende tot Y wordt toegevoegd.
Ten einde geen verwarring te stichten zullen we in het vervolg met *differentiaalvergelijking* een differentiaalvergelijking bedoelen in de zin zoals hierboven geciteerd en zullen we een differentiaalvergelijking in de zin van de NC met *differentiaalachtige vergelijking* aanduiden.
We kunnen ons voorstellen dat de NC ervoor terugdeinst te adviseren de definitie uit Hurewicz te presenteren aan leerlingen van het vwo. In feite is dit ook niet nodig, want men kan van begin af aan spreken over differentiaalvergelijkingen van het type $y' = f(x, y)$.

2 *Hoe noteren we bij voorkeur een differentiaalvergelijking?*
Uit het bovenstaande zal het reeds duidelijk zijn, dat wij de voorkeur geven aan de notatie $y' = f(x,y)$. In deze situatie is het zeker ook mogelijk om de theorie der lijnelementen te behandelen, hiervoor verwijzen we naar Hurewicz. De motivering van onze voorkeur wordt deels in de volgende paragraaf gegeven en het overige deel illustreren we aan het voorbeeld dat tevens door de NC is gekozen:

$$(y + 4)\mathrm{d}x = (x - 2)\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Aan (1) wordt voldaan door:

$$x = 4, y = -1, \ \mathrm{d}x : \mathrm{d}y = 2 : 3 \qquad (2)$$

waarbij we ons afvragen, hoe men controleert of aan (1) voldaan wordt door (2). Vult men in $x = 4$, $y = -1$, $\mathrm{d}x = 2$ en $\mathrm{d}y = 3$, òf moet men hierbij denken aan $(y + 4)\mathrm{d}x = (x - 2)\mathrm{d}y$ equivalent met $\mathrm{d}x : \mathrm{d}y = (x - 2) : (y + 4)$? Voorzover wij weten is $\mathrm{d}x = 2$ niet gedefinieerd. Derhalve blijft over:

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y = (x - 2) : (y + 4). \qquad (3)$$

Gezien (3) vragen wij aan de NC waarom de differentiaalachtige vergelijking dan ook niet zo geschreven wordt?
Tevens vragen wij ons af, hoe in de notatie van de NC uitbreiding naar hogere orde differentiaalvergelijkingen zal geschieden, immers het is waarschijnlijk dat in de toekomst ook dergelijke vergelijkingen op de middelbare school zullen worden behandeld. Deze uitbreiding is bij onze voorkeur heel eenvoudig, immers een tweede orde differentiaalvergelijking kan er dan als volgt uitzien:

$$y'' = f(x, y, y').$$

3 *Wat verstaan we onder het oplossen van een differentiaalvergelijking?*
In het citaat uit Hurewicz is reeds aangegeven wat een oplossing van een differentiaalvergelijking is. Onder de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking zullen we verstaan de verzameling van alle *functies* die aan de gegeven differen-

tiaalvergelijking voldoen.
De door ons geschetste alternatieve aanpak lijkt ons minstens net zo eenvoudig als die van de NC. Voorts heeft hij het voordeel dat *uitsluitend* functies oplossing kunnen zijn (Opm.: Aan differentiaalachtige vergelijkingen kunnen ook relaties die geen functies zijn voldoen).
Waarom hechten wij er zo'n belang aan dat uitsluitend functies oplossing kunnen zijn? Verreweg de belangrijkste reden is wel dat in de praktijk vrijwel uitsluitend differentiaalvergelijkingen voorkomen die problemen beschrijven met functies als oplossing.

4 *Slotbeschouwing*
Het in paragraaf 1 gegeven citaat uit Hurewicz is niet zo maar een citaat, maar geeft in essentie de algemeen gebruikelijke beschouwing t.a.v. de (eerste orde) differentiaalvergelijkingen.
Het is daarom waarschijnlijk dat juist toepassing van de voorstellen van de NC het inzicht in de betekenis van een differentiaalvergelijking bemoeilijkt. Men kan zich zelfs afvragen of m.b.v. de theorie der differentiaalachtige vergelijkingen inzicht verkregen kan worden in de theorie der differentiaalvergelijkingen.
Tenslotte lijkt het ons moeilijk om m.b.v. differentiaalachtige vergelijkingen aansluiting te verkrijgen met het w.o., waar differentiaalvergelijkingen behandeld worden.

Korte reactie op het artikeltje van de heren Moet en Terlouw:

Het belangrijkste bezwaar van de schrijvers lijkt mij te zijn, dat aan onze differentiaalachtige vergelijkingen ook andere dingen dan differentieerbare functies voldoen. Deze ketterij komt echter niet uit de koker van de Nomenclatuurcommissie en daarom zal ik er hier niet op ingaan.

Wij hebben nu eenmaal te maken met de meetkundige interpretatie en daar van uitgaande heeft de Nomenclatuurcommissie een passende notatie pogen te maken. Eén van de (didactische) probleempjes daarbij was gelegen in het feit, dat met bijvoorbeeld 3 : 2 zowel een 'verhouding' als een rationaal getal werd aangeduid. Zodra in zo'n getallenpaar het tweede getal gelijk wordt aan 0 (en dat geval speelt bij de differentiaalachtige vergelijkingen telkens een rol; zie de examenvraagstukken), staat de deur open voor misverstanden bij de leerlingen. Vandaar de voorkeur voor $(y + 4)\mathrm{d}x = (x - 2)\mathrm{d}y$, dat gelijkwaardig is met $\mathrm{d}x$ 'staat tot' $\mathrm{d}y$ als $x - 2$ tot $y + 4$ en niet met $\mathrm{d}x$ 'gedeeld door' $\mathrm{d}y$ is gelijk aan $x - 2$ gedeeld door $y + 4$.

Uitbreiding naar hogere orden is binnen dit kader inderdaad niet mogelijk, maar ook niet nodig; het is zeker waarschijnlijk dat in de toekomst ook de vergelijkingen van hogere orde een rol gaan spelen, maar over de verheid van die toekomst en over de grootte van die waarschijnlijkheid heb ik geen enkel idee.

Die enkele leerling uit een klas, die later differentiaalvergelijkingen zal ontmoeten in het w.o., zal daar wel wennen, dunkt mij. Per slot van rekening is hij een knaap met aanleg!

A. van Tooren

Mededeling van de redactie

Het ligt in het voornemen een nummer van Euclides te wijden aan de statistiek en de waarschijnlijkheidsrekening. Daar dit nummer, i.v.m. het eindexamenprogramma v.w.o., in deze of in het begin van de volgende jaargang moet verschijnen, verzoekt de redactie ieder die suggesties heeft, deze zo spoedig mogelijk kenbaar te maken.

Het deelbaarheidskenmerk van Pascal

LOURENS VAN DEN BROM
Krommenie

1 Vrij algemeen bekend zijn de kenmerken voor de deelbaarheid van een natuurlijk getal door 2, 4, 8, 16, etc.; 5, 25, 125, etc.; 10, 100, 1000, etc.; 3 en 9; 11; 7 en 13. Dat zijn dan kenmerken welke zich betrekken op de decimale schrijfwijze van het natuurlijke getal.
Minder bekend is het dat er een algemeen kenmerk bestaat, waaruit de kenmerken voor de genoemde delers zich rechtstreeks en zeer eenvoudig laten afleiden, en waaruit voor iedere andere gehele deler - indien gewenst - zo'n kenmerk is op te stellen. Dat kenmerk is zo algemeen dat het toepasbaar is in ieder positiestelsel met een geheel basisgetal, groter dan of gelijk aan 2.
Ja, het is zelfs zo algemeen dat het bruikbaar is in een stelsel waarbij het basisgetal per positie variëert. Voorbeelden van zulke stelsels zijn:
a Het oude Engelse muntstelsel, dat kortgeleden door een decimaal stelsel werd vervangen.
b De wijze waarop wij in het dagelijkse leven de lengte van een tijdsinterval opgeven.
c De notatie van een natuurlijk getal N op de z.g. Cantor-basis:

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (k+1)! = a_n \cdot (n+1)! + a_{n-1} \cdot n! + \ldots + a_1 \cdot 2! + a_0 \cdot 1!$$

waarbij voor de 'cijfers' a_k geldt dat zij geheel zijn en $0 \leqq a_k \leqq k+1$. De opvolgende basisgetallen, 'Stufenzahlen', zijn bij deze Cantor-basis 2, 3, 4, 5, etc.

Tevens maakt dat algemene kenmerk het duidelijk waarom in het decimale stelsel soortgelijke kenmerken, voor andere dan de genoemde delers, weinig praktische betekenis hebben.
De idee van dat algemene kenmerk gaat terug tot 1654. In dat jaar stelde Blaise Pascal (19.6.1623-19.8.1662) een stuk op met als titel 'Caractères de divisibilité des nombres, déduits de la connaissance de la somme de leurs chiffres', waarin de betreffende kwestie behandeld wordt. Dat artikel verscheen eerst in gedrukte vorm in de openbaarheid in 1665, als een aanhangsel van het 'Traité du triangle arithmétique', dat eveneens door Pascal in 1654 geschreven was.

2 Het kenmerk van Pascal komt op het volgende neer:
Zij N het natuurlijke getal dat onderzocht moet worden op de deelbaarheid door d, waarbij N genoteerd is in één of ander positiestelsel. Men berekent S, de som der cijfers van N, waarbij eerst ieder der cijfers met een factor vermenigvuldigd is. Die factor is de rest bij deling door d van de positiewaarde van het betreffende cijfer.
N en S verschillen een veelvoud van d, behoren tot dezelfde restklasse *mod d*, zodat het onderzoek der deelbaarheid van N kan worden overgebracht naar dat van, het in het algemeen veel kleinere getal, S. Eventueel herhaalt men de procedure met S, etc.

Toelichting: Indien $N = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)$ geschreven op zekere basis, dan betekent dat:

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_k, \text{ waarin } B_k \text{ de waarde van de } k^e \text{ positie.}$$

$$B_k = \prod_{j=0}^{k} b_j, \text{ met } b_0 = 1 \text{ en de overige } b_j \geqq 2 \text{ en geheel.}$$

De getallen b_j zijn de basisgetallen, 'Stufenzahlen', verder geldt voor de 'cijfers' $a_k : 0 \leqq a_k < b_{k+1}$.

Als voorbeeld ons decimale stelsel, daarin zijn alle $b_j = 10$, behalve $b_0 = 1$, en $B_k = 10^k$; voor de 'cijfers' a_k geldt $0 \leqq a_k < 10$.

$$N = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_{b=10} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Deelt men nu de positiewaarde B_k door d, waarbij Q_k als quotiënt en r_k als rest optreedt, dan kan men voor B_k schrijven:

$B_k = Q_k \cdot d + r_k \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, dan is

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(Q_k d + r_k) = (\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot Q_k)d + \sum_{k=0}^{n} a_k r_k.$$

$N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_k$ en $S = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot r_k$ verschillen een veelvoud van d.

Ter berekening van de getallen r_k, die in $S = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot r_k$ optreden, kunnen we gebruik maken van het volgende iteratieve schema:

$$\text{(A)} \quad \begin{array}{l} r_0 = 1 \text{ en} \\ r_{k-1} b_k = q_k d + r_k, \text{ voor } k = 1, 2, 3, \text{etc.} \end{array}$$

Dat dit proces de gewenste resten r_k oplevert ziet men met volledige inductie:

$$b_0 = r_0 = 1$$

Voor $k = 1$: $B_1 = b_0 b_1 = r_0 b_1 = q_1 d + r_1 = Q_1 d + r_1$

Van k naar $k + 1$: $B_{k+1} = B_k \, b_{k+1} = (Q_k d + r_k) \, b_{k+1} =$

$$= Q_k \, b_{k+1} \, d + r_k \, b_{k+1} =$$
$$= Q_k \, b_{k+1} \, d + (q_{k+1} d + r_{k+1}) =$$
$$= Q_{k+1} \, d + r_{k+1}$$

Tevens volgt: $Q_{k+1} = Q_k \, b_{k+1} + q_{k+1}$ met $Q_0 = 0$.

3 Pascal had het bij de beschrijving en het bewijs van zijn methode moeilijker dan wij, vooral omdat in zijn tijd de wiskundige symboliek nog niet zo ver ontwikkeld was als thans het geval is. Pascal beschreef zijn methode ook slechts voor het decimale talstelsel, maar geeft aan het eind van zijn verhandeling wel een voorbeeld uit het twaalftallige stelsel, met de opmerking: 'Mais la méthode que j'ai fait connaitre, et la démonstration que j'en ai donnée, conviennent encore à ce système (d.w.z. het twaalftallige) ainsi qu'à tout autre'.

Of Pascal bij dat 'tout autre' ook gedacht heeft aan systemen, welke zo algemeen zijn dat ook de 'Stufenzahlen' van positie tot positie mogen variëren, laat zich slechts raden. Dat moet echter wel binnen het bereik van Pascal gelegen hebben, want hij construeerde apparaten waarmee het optellen en het aftrekken machinaal kon worden uitgevoerd, waarbij verschillende van die apparaten zo waren ingericht dat zij geschikt waren voor het rekenen met geldbedragen in een muntstelsel

waarin deniers, sous en livres voorkwamen. (12 deniers = 1 sou en 20 sous = 1 livre.) Maar laten we niet gaan raden! Vaak reeds heeft een al te persoonlijke interpretatie of extrapolatie van historische gegevens aanleiding gegeven tot het ontstaan van fabeltjes op het gebied van de geschiedenis der wetenschappen.

Voor het bewijs beperkte Pascal zich tot getallen met één, twee en drie cijfers in het decimale talstelsel, waarbij hij laat volgen: 'Et de même si le nombre donné se composait de plus de trois chiffres'.

In de beschrijving en in het bewijs maakte Pascal geen gebruik van quotiënten, zoals ik dat in het voorgaande deed. Pascal werkte met veelvouden van de deler en met getallen die zo'n veelvoud verschillen. Herhaaldelijk treft men opmerkingen aan als:
'On retranche le diviseur autant de fois que possible', zodat we gerust mogen stellen dat het rekenen met getallen-congruenties in de kiem aanwezig is in de betreffende verhandeling van Pascal. We doen er daarom goed aan het proces (A) te vervangen door (P), dat voor ons doel gelijkwaardig is met (A).

(P) $r_0 = 1$ en
$r_{k-1} b_k \equiv r_k \ (mod\ d)$ voor $k = 1, 2, 3,$ etc.

Het hierin optredende symbool $\equiv$ is door Carl Friedrich Gauss (30.4.1777–23.2.1855) geïntroduceerd in zijn in 1801 verschenen 'Disquisitiones Arithmeticae'.

In het decimale stelsel (en in ieder stelsel met vast basisgetal) kunnen we het schema (A) zien als de staartdeling van d op $r_0 = 1$, waarbij achter de komma telkens een 'nul' wordt neergelaten, d.w.z. waarbij telkens de optredende rest met b, in casu 10, vermenigvuldigd wordt. De successieve resten bij die staartdeling zijn dan de multiplicatoren r_k.
Indien men echter de methode een zo algemene toepasbaarheid wenst te geven, als in het begin van dit stuk werd gedaan, dan is het verstandiger om het schema (A) of (P) ook naar de vorm uit te voeren. Vooral wordt hierbij gedacht aan een stelsel, waarin niet voor alle k geldt: $B_{-k} = \frac{1}{B_k}$, waarbij B_{-k} de positiewaarde van de k^e plaats achter de komma voorstelt.
Verder is (P) op de schrijfmachine, of voor de zetter, handzamer dan een staartdeling.

4 Voorbeelden waarbij N genoteerd is in het decimale talstelsel:

$d = 3$

$$r_0 = 1,$$
$$1.10 \equiv 1 \ (mod\ 3), \quad r_1 = 1,$$
en bijgevolg zijn alle $r_k = 1$.

Dus $N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k = S \ (mod\ 3).$

S is de gewone som der cijfers.

$d = 11$

$$r_0 = 1,$$
$$1.10 \equiv -1 \ (mod\ 11), \quad r_1 = -1,$$
$$-1.10 \equiv +1 \ (mod\ 11), \quad r_2 = +1,$$
en bijgevolg zijn de multiplicatoren alternerend +1 en −1.

Dus $N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = S \ (mod\ 11)$.
S is de alternerende som der cijfers.

In plaats van $r_1 = 10$, zoals Pascal deed, hebben wij $r_1 = -1$ gekozen. Het schema (A) en het bewijs, zoals ze hiervoor (in 2) gegeven werden, worden niet beïnvloed indien we ook negatieve gehele quotiënten en resten toelaten. Dat geeft ons de gelegenheid om, als het ons zo uitkomt, in navolging van Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) te werken met de z.g. absoluut kleinste resten.

$d = 7$

	$r_0 = 1$,	of		$r_0 = 1$,
$1.10 \equiv 3\ (mod\ 7)$,	$r_1 = 3$,			$r_1 = 3$,
$3.10 \equiv 2$ („),	$r_2 = 2$,			$r_2 = 2$,
$2.10 \equiv 6$ („),	$r_3 = 6$,		$2.10 \equiv -1\ (mod\ 7)$,	$r_3 = -1$,
$6.10 \equiv 4$ („),	$r_4 = 4$,		$-1.10 \equiv -3$ („),	$r_4 = -3$,
$4.10 \equiv 5$ („),	$r_5 = 5$,		$-3.10 \equiv -2$ („),	$r_5 = -2$,
$5.10 \equiv 1$ („),	$r_6 = 1$.		$-2.10 \equiv +1$ („),	$r_6 = 1$.

Vanaf $r_6 = 1$ gaat het rijtje 1, 3, 2, 6, 4, 5, of eventueel 1, 3, 2, −1, −3, −2, zich periodiek herhalen.
Uit $r_6 = 1$ volgt $1.10^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$, zodat voor deelbaarheid door 7, op basis 10^6, het getal S de som der 'cijfers' is.
Uit $r_3 = -1$ volgt $1.10^3 \equiv -1\ (mod\ 7)$, zodat op basis 10^3 de resten alternerend +1 en −1 zijn. Op basis 10^3 is het getal S, voor de deelbaarheid door 7, de alternerende som der 'cijfers'.

Toepassing: Is 287 542 178 deelbaar door 7?
De alternerende som der 'cijfers' op basis 10^3: $287-542+178 = -77$. Herkent men niet dat 77 een 7-voud is, dan gaan we verder met de
multiplicatoren voor de basis 10: $3.7 + 1.7 = 28$,
daarna volgt : $3.2 + 1.8 = 14$,
en vervolgens : $3.1 + 1.4 = 7$.
Waarna we mogen concluderen dat 14, 28, 77 en 287 542 178 veelvouden van 7 zijn.

Pascal geeft dit voorbeeld ook, maar hij maakt alleen gebruik van de multiplicatoren 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, waarmee hij eerst krijgt 119, daarna 14 en merkt dan op: 'Enfin, et par curiosité plutôt que par nécessité, on pourra traiter encore le nombre 14 comme on a traité 119, . . .' en ook hij komt dan tot 7.

We merkten op dat $10^3 \equiv -1\ (mod\ 7)$, zodat 1001 een 7-voud is.
Maar 1001 = 7.11.13. Dus ook $10^3 \equiv -1\ (mod\ 11)$ en $10^3 \equiv -1\ (mod\ 13)$.
Conclusie: In het decimale talstelsel kunnen we voor 7, 11 en 13 hetzelfde deelbaarheids kenmerk formuleren, n.l.:
Het getal N is deelbaar door 7, 11 of 13, indien de alternerende som der cijfers, op basis 10^3, deelbaar is door het betreffende getal.

$d = 4$

$$r_0 = 1,$$
$$1.10 \equiv 2 (mod\, 4), \quad r_1 = 2,$$
$$2.10 \equiv 0 (mod\, 4), \quad r_2 = 0 \quad \text{en} \quad r_k = 0 \quad \text{voor} \quad k \geqq 2.$$

Dus $N = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \equiv 2a_1 + a_0 = S\, (mod\, 4)$.

Toepassing: $1396 \equiv 2.9 + 6 = 24\, (mod\, 4)$,
$24 \equiv 2.2 + 4 = 8\, (mod\, 4)$.

Als we nu 8 als 4-voud herkennen, dan weten we ook dat 24 en 1396 door 4 deelbaar zijn.

5 Om de geïnteresseerde lezer allerlei rekenwerk te besparen volgen in een tabel de multiplicatoren voor enige delers ten opzichte van het decimale talstelsel. Daarbij dient de tabel van rechts naar links gelezen te worden, in overeenstemming met de positionele schrijfwijze van de getallen.
Verder is in de tabel het repeteren van een getal of een rijtje getallen aangegeven door de betreffende getallen tussen haakjes te plaatsen.

. .	r_9	r_8	r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	d
									(0)	1	2
										(1)	3
								(0)	2	1	4
									(0)	1	5
									(−2)	1	6
					(−2	−3	−1	2	3	1)	7
							(0)	4	2	1	8
										(1)	9
									(0)	1	10
									(−1	1)	11
								(4)	−2	1	12
					(4	3	−1	−4	−3	1)	13
				(−6	−2	4	6	2	−4)	1	14
									(−5)	1	15
						(0)	8	4	−6	1	16
(. . .	−10	−1	5	9	6	4	14	15	10	1)	17
								(19	10	1)	27
								(26	10	1)	37
						(37	16	18	10	1)	41
							(−10	−1	10	1)	101
								(−11	10	1)	111
						(−27	−84	100	10	1)	271

Voor $d = 17$ krijgt men r_8 t.e.m. r_{16} door r_0 t.e.m. r_7 te herhalen voorzien van een −-teken. Er geldt $r_{8+k} = -r_k$ voor $k = 0, 1$, etc.

Bij nadere analyse kunnen we opmerken dat indien d alleen factoren bevat, die ook in het basisgetal voorkomen, alle r_k, vanaf zekere index, 0 zijn; en omgekeerd. Voor $b = 10 = 2.5$ en $d = 2^a.5^b$ geldt $r_l = 0$ voor $l \geqq \max(a, b)$.

Indien d een factor bevat, welke niet in b voorkomt, dan is d voor geen enkele k deelbaar op b^k, zodat geen der $r_k = 0$ kan zijn.
In zo'n geval heeft men $d-1$ verschillende mogelijkheden, $\neq 0$, voor de resten. Na het opschrijven van d zulke opvolgende resten zijn er dus minstens twee gelijke opgetreden. Bij gevolg treedt in zo'n geval repetentie op, die vanzelfsprekend overeenstemt met de periodiciteit van de positionele ontwikkeling van $\frac{1}{d}$. (Denk aan de staartdeling, die ons onze multiplicatoren levert.)
Op grond van de 'kleine stelling' van Pierre Fermat (?.8.1601-12.1.1665) - die stelt dat $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ voor een priemgetal p dat relatief priem is met a - zal voor een priemgetal d, dat geen factor is van het basisgetal, gelden $r_{d-1} = 1$ en bijgevolg dient de lengte van de periode dan $d-1$ te zijn of een deler van $d-1$.
Op basis 10 hebben bijvoorbeeld de delers 7, 17, 19, 23 en 29 een periode met de maximale lengte $d-1$. Waaruit dan tevens blijkt dat een deelbaarheidskenmerk voor 17 in het decimale talstelsel weinig praktische betekenis heeft. Het zou kunnen luiden: Als de alternerende som der 'cijfers', op basis 10^8, deelbaar is door 17, dan is het getal, waaruit die som is afgeleid, zulks eveneens.
Op basis 10 hebben bijvoorbeeld de delers 3, 11, 13, 37, 41, 101 en 271 een periode welke kleiner is dan $d-1$.
De delers van $10^k - 1$ bezitten een periode ter lengte k.
Zo is $10^3 - 1 = 3^3.37$ en hebben 3, 9, 27, 37, 111, 333 en 999 een periode ter lengte 3 in de rij der resten. Hetgeen echter niet uitsluit dat 3 en 9 reeds een periode ter lengte 1 bezitten.
7 De lezer zal zich wellicht afvragen waarom ik aandacht gevraagd heb voor de onderhavige kwestie in een maandblad voor de didactiek van de wiskunde. Een kwestie welke ongemerkt - indien men zich erin gaat verdiepen - verder voert tot allerlei opgeloste en onopgeloste problemen uit de getallentheorie.
Wel die redenen zijn:
a Een ieder, die reken- of wiskundeonderwijs geeft, zal weleens in aanraking komen met de in het begin van dit stuk genoemde deelbaarheidskenmerken. Dit artikel verschaft nu enige achtergrond-informatie, die men in deze vorm in het algemeen niet tegenkomt in de leerboeken over getallentheorie. De eenvoud en de algemene toepasbaarheid van het kenmerk van Pascal zijn overigens de moeite van het onder de aandacht brengen ruimschoots waard.
b In wiskunde II voor v.w.o. heeft men als keuze mogelijkheid 'getallentheorie'. Nu levert dat kenmerk van Pascal, voorafgegaan door een behandeling van de verschillende talstelsels, een geschikt aanknopingspunt om dat keuze-vak van de grond te helpen. Al rekenende, en zodoende experimenterende, zullen de leerlingen al spoedig geconfronteerd worden met problemen, welke de groten uit het verleden gefascineerd en geïnspireerd hebben.
Ik zou dit stuk kunnen besluiten met nog enkele tabellen voor andere talstelsels dan het decimale. Ook zou ik nog tabellen kunnen geven waarin de deler constant gehouden wordt en het basisgetal van het talstelsel varieert. Het lijkt mij echter beter dat over te laten aan de leerlingen van die leraren, die getallentheorie als keuze-onderwerp genomen hebben.
Voor mij is het nu verstandiger om te eindigen - zo ik dat al niet eerder had moeten doen - met de woorden waarmee ook Pascal zijn verhandeling besluit:
'. . .; toutefois je quitte maintenant ce sujet; de plus longues explications fatigueraient infailliblement le lecteur'.

XIVde Internationale Wiskunde Olympiade, Torun, juli 1972.

Opgaven

1 Rusland, 5 punten
Men kiest een willekeurig tiental getallen van twee cijfers (gehele getallen tussen 9 en 100). Bewijs dat men uit dat tiental twee deelverzamelingen zonder gemeenschappelijke elementen kan kiezen en wel zo, dat de som van de getallen van de ene deelverzameling gelijk is aan de som van de getallen van de andere deelverzameling.

2 Nederland, 6 punten
Bewijs dat voor elke gehele $n \geqslant 4$ geldt: elke koordenvierhoek kan verdeeld worden in n stukken, die zelf ook weer koordenvierhoeken zijn.

3 Engeland, 7 punten
Bewijs dat voor willekeurige niet-negatieve gehele getallen m en n geldt, dat

$$\frac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!}$$

een geheel getal is. (Bedenk dat $0! = 1$)

4 Nederland, 7 punten
Bepaal alle oplossingen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

van het onderstaande stelsel ongelijkheden, waarin

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

positieve reële getallen zijn:

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0 \qquad \text{I}$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqslant 0 \qquad \text{II}$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqslant 0 \qquad \text{III}$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0 \qquad \text{IV}$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0 \qquad \text{V}$$

5 Bulgarije, 7 punten
Van de functies f en g is gegeven dat $f(x)$ en $g(x)$ voor elke reële x bestaan, dat $f(x) = 0$ niet voor elke x geldt, en dat elk willekeurig paar (x, y) voldoet aan de vergelijking $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$.
Bewijs: als $|f(cx)| \leqslant 1$ voor elke x waar is, dan is $|g(y)| \leqslant 1$ voor elke y waar.

6 Engeland, 8 punten
Bewijs dat er bij elk gegeven viertal – van elkaar verschillende – evenwijdige vlakken een regelmatig vierkant bestaat, waarvan in elk van die gegeven vlakken een hoekpunt ligt.

Oplossingen en commentaar

1 Dit eenvoudige vraagstuk is een toepassing van het 'principe van Dirichlet'. Een verzameling met 10 elementen heeft $2^{10} = 1024$ deelverzamelingen. Eén daarvan is leeg en één is die verzameling zelf. In dit vraagstuk hebben we met die twee uitzonderlijke deelverzamelingen niets te maken; we beschouwen 1022 deelverzamelingen van het tiental natuurlijke getallen.
De som van de elementen van zo'n deelverzameling is een geheel getal, minimaal gelijk aan 10 en maximaal gelijk aan $99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 855$. Er zijn dus $855 - 9 = 846$ mogelijke waarden voor die som.
Omdat er meer deelverzamelingen zijn dan mogelijke somwaarden zullen er twee deelverzamelingen met gelijke som bestaan. Verwijderen we daaruit eventuele gemeenschappelijke elementen, dan houden we twee deelverzamelingen over die aan de gestelde eisen voldoen.
Dit vraagstuk werd door 61 van de 107 deelnemers volledig opgelost.

2 Voor het geval $n = 4$ bewijzen we dat elke koordenvierhoek verdeeld kan worden op de manier van de nevenstaande figuur 1: door een punt S binnen de gegeven koordenvierhoek trekken we vier halve lijnen a, b, c, d die achtereenvolgens de zijden DA, AB, BC, CD treffen. Daarbij moet de 'vierstraal' a, b, c, d aan een paar voorwaarden voldoen. In de eerste plaats mogen de trefpunten met de zijden geen hoekpunten van vierhoek $ABCD$ zijn. In de tweede plaats moeten de hoeken 1, 2, 3, 4 achtereenvolgens gelijk zijn aan $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi - \delta$,

waarin α' β, γ, δ de hoeken van de gegeven koordenvierhoek zijn. De vorm van de vierstraal wordt hierdoor volledig bepaald. De kunst is zijn stand en de plaats van zijn centrum S geschikt te kiezen.

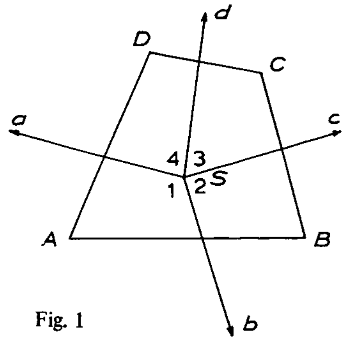


Fig. 1

Een geschikte stand van de vierstraal wordt in figuur 2 getoond, waarin voorlopig het hoekpunt A als centrum gekozen is: c langs AB en d langs AD. De hoek tussen c en d heeft nu juist de goede grootte van $\pi - \gamma$!
Bij elke koordenvierkant $ABCD$ zullen de (voorlopige) a en b buiten de vierhoek vallen en de door hen ingesloten hoek $\pi - \alpha$ zal de overstaande hoek van hoek A ten dele overlappen (omdat er binnen de nevenhoeken van hoek A niet voldoende plaats is om die $\pi - \alpha$ in op te bergen).

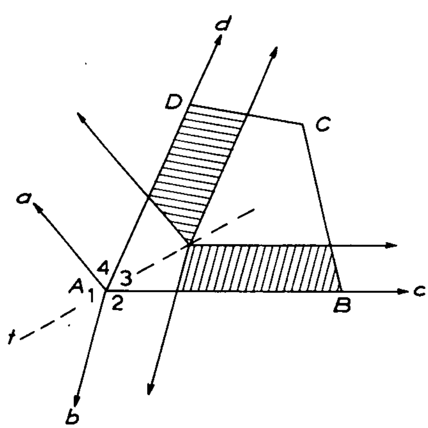


Fig. 2

We kunnen dus een lijn door A trekken, die aan de ene kant binnen hoek A verloopt en aan de andere kant binnen de door a en b gevormde hoek verloopt. Verschuiven we nu de voorlopige vierstraal zo, dat zijn centrum deze lijn t volgt, dan verkrijgt hij precies de gewenste stand (mits we niet over een te grote afstand gaan verschuiven!).
Onder de vier koordenvierhoeken, waarin vierhoek $ABCD$ nu verdeeld is, bevinden zich twee gelijkbenige trapezia; in figuur 2 zijn ze gearceerd. Elk van hen kan verder onderverdeeld worden in elk gewenst aantal koordenvierhoeken, namelijk

door lijnen te trekken die evenwijdig zijn met de evenwijdige zijden. Daarmee is dan de mogelijkheid van verdeling voor willekeurige $n > 4$ aangetoond.

De verdelingsmethode voor het geval $n = 4$ kan met kleine wijzigingen ook gebruikt worden als $ABCD$ geen koordenvierhoek is: trek de voorlopige c (door A) binnen hoek BAC en de voorlopige d binnen hoek DAC. Nodig is daarvoor, dat $\alpha > \pi - \gamma$. Maar in elke niet-koordenvierhoek is er een paar overstaande hoeken met som groter dan π, dus dat is geen probleem.
In feite kan men aantonen dat de stelling in de opgave ook juist is voor de verdeling van niet-koordenvierhoeken. Bij het bewijs vraagt dan het geval $n = 5$ wat extra spitsvondigheid. Het geval $n = 6$ is weer eenvoudig: verdeel de vierhoek in twee driehoeken door een diagonaal te trekken, verdeel elk van die driehoeken in drie koordenvierhoeken door uit het middelpunt van de ingeschreven cirkel loodlijnen neer te laten op de zijden. En dan kan men verder gaan met behulp van de opmerking dat als er een verdeling in n koordenvierhoeken mogelijk is er zeker ook een verdeling in $n + 3$ koordenvierhoeken bestaat (te construeren door één van die n koordenvierhoeken onder te verdelen in vier koordenvierhoeken).

Min of meer tegen de verwachtingen van de jury in vielen de resultaten van deze opgave nogal tegen. Er waren veel lange verhalen, waarin onbewezen beweringen stonden. Een typische fout was: elke koordenvierhoek kan in vier koordenvierhoeken verdeeld worden door uit het middelpunt van de omschreven cirkel loodlijnen neer te laten op de zijden. Er waren 24 volledig goede oplossingen.

3 De 30 volledig goede oplossingen van dit vraagstuk tonen aan, dat het voor de deelnemers toch iets gemakkelijker was dan het voorgaande!
De meeste van die oplossingen maken gebruik van het 'lemma van Lagrange': in de priemfactorenontbinding van $a!$ is de exponent bij het priemgetal p gelijk aan

$$E(\frac{a}{p}) + E(\frac{a}{p^2}) + E(\frac{a}{p^3}) + E(\frac{a}{p^4}) + \ldots$$

Hierin duidt E op de bekende 'entierfunctie': $E(x)$ is het grootste gehele getal, dat niet groter is dan x.
Dit lemma gebruikt men om te bewijzen dat voor elk priemgetal p geldt, dat de exponent bij p in de priemfactorontbinding van de teller ten minste gelijk is aan de exponent bij p in de priemfactorontbinding van de noemer. Dit volgt dan uit het feit dat voor elke $t = p^k$ (k natuurlijk) geldt:

$$E(\frac{2m}{t}) + E(\frac{2n}{t}) \geqslant E(\frac{m}{t}) + E(\frac{n}{t}) + E(\frac{m+n}{t})$$

Stel $m = at + b$, $n = ct + d$ waarin a, b, c, d geheel en $0 \leqslant b, d < t$. Dan gaat de betrekking, die bewezen moet worden over in

$$E(\frac{2b}{t}) + E(\frac{2d}{t}) \geqslant E(\frac{b+d}{t})$$

Hierin is het rechterlid gelijk aan 0 of aan 1. Is het gelijk aan 0, dan zijn we al klaar. Is het gelijk aan 1, dan is $b + d \geqslant t$ en dus $b \geqslant \frac{1}{2}t$ of $d \geqslant \frac{1}{2}t$, zodat het linkerlid gelijk is aan 1 of aan 2.
In een andere oplossing van dit vraagstuk wordt eerst opgemerkt dat $f(m, 0)$ een binomiaalcoëfficient en dus geheel is; hierin stelt $f(m, n)$ de in de opgave gegeven uitdrukking in m en n voor.
Dan bewijst men, dat $f(m, n) = 4\,f(m, n-1) - f(m+1, n-1)$. En door dit n maal toe te passen schrijft men dan tenslotte $f(m, n)$ als lineaire combinatie van binomiaalcoëfficienten, met gehele combinatiefactoren.

4 De som van de linkerleden van de vijf ongelijkheden is om te vormen tot

$$\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_3 - x_5)^2 + \tfrac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)(x_4 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2)(x_5 - x_2)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2)(x_1 - x_3)^2 + \tfrac{1}{2}(x_5^2 + x_1^2)(x_2 - x_4)^2$$

waarin elke term niet-negatief is terwijl hun som niet-positief moet zijn. Dit kan alleen maar wanneer elke term gelijk is aan 0, dus als $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.
Maar in dat geval blijkt ook aan elk van de vijf ongelijkheden apart voldaan te worden. Elke oplossing van het stelsel heeft dus de vorm (a, a, a, a, a) voor de een of andere positieve a.

Vele oplossers probeerden hun doel te bereiken door de verschillende grootte-ordeningen van de x'en te klassificeren en dan elk geval apart te bestuderen. Dat is ook heel goed mogelijk. En het aantal klassen kan men daarbij aanmerkelijk beperken door goed rekening te houden met het cyclische karakter van het stelsel ongelijkheden.
Er waren 51 volledig goede oplossingen.

5 De fraaiste oplossing van dit vraagstuk kwam van een Poolse deelnemer, die daar dan ook een extra prijs mee verdiende. Hij maakte daarin gebruik van het begrip 'supremum'. Dat is een veralgemening van het begrip 'maximum'.
Laat A een naar boven begrensde verzameling reële getallen zijn. Hier wil 'naar boven begrensd' zeggen dat er een getal p bestaat met de eigenschap, dat voor elk element a van A geldt $a \leqslant p$. Zo'n getal p heet 'een bovengrens van A'. Het is duidelijk dat een naar boven begrensde verzameling A niet één, maar oneindig veel bovengrenzen heeft (elk getal, dat groter is dan de een of andere bovengrens, is zelf ook bovengrens!). In de analyse wordt nu bewezen dat er onder al die bovengrenzen een kleinste is. En die kleinste bovengrens heet 'supremum van A'.
Een voorbeeld: als A het interval van de getallen tussen 0 en 1 is, dan is 1 het supremum van A; voegen we aan A het getal 1 nog toe dan ontstaat een nieuwe verzameling, die ook 1 als supremum heeft en tevens is 1 dan het maximale getal in die verzameling.

Omdat $|f(x)| \leqslant 1$ voor elke x kan verondersteld worden te gelden, heeft het bereik van de functie f een supremum m (waarvan we weten dat $m \leqslant 1$ is).
Stel nu, dat er een y_0 is zo, dat $|g(y_0)| > 1$ is. Dan geldt voor elke x

$$|2 f(x) g(y_0)| = |f(x + y_0) + f(x - y_0)| \leqslant 2m$$

Hieruit blijkt, dat $m / |g(y_0)|$ een bovengrens van het bereik van f is en tevens kleiner is dan de kleinste bovengrens, het supremum m. Dit is ongerijmd. En dus deugt de veronderstelling niet, dat er zo'n y_0 bestaat. Daarom geldt voor elke y dat $|g(y)| \leqslant 1$.
Met 25 volledig goede oplossingen blijkt dit vraagstuk toch ook wel tot de moeilijkste van deze olympiade te behoren.

6 En daar steekt het stereometrievraagstuk met 28 volledig goede oplossingen maar nauwelijks gunstig bij af. Misschien zijn de volgende twee argumenten daar een verklaring voor:

- Het bekende analoge planimetrische vraagstuk (construeer een gelijkzijdige driehoek, die op elk van drie gegeven evenwijdige lijnen een hoekpunt heeft) bezit een eenvoudige constructieve oplossing; in dit stereometrische geval ligt een constructieve oplossing wat verder weg.
- De opgave was zo geformuleerd, dat er een existentiebewijs gevraagd werd. Dat verleidt gemakkelijk tot kwalitatieve beschouwingen, die heel moeilijk 'hard' te maken zijn. We leven niet meer met Euclides!

De onderstaande oplossing is constructief van karakter. En hij levert meer dan gevraagd werd. We veronderstellen dat er een willekeurig viervlak $OABC$ gegeven is en bewijzen dan dat er een daarmee gelijkvormig viervlak $O'A'B'C'$ bestaat, waarvan in elk van de vier gegeven vlakken een hoekpunt ligt.

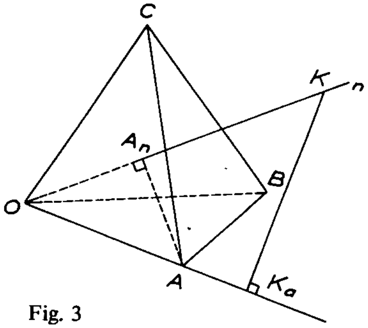


Fig. 3

Gemakshalve denken we ons de vier gegeven vlakken horizontaal en we noemen ze van onder naar boven V_O, V_A, V_B, V_C. De afstanden van V_A, V_B, V_C tot V_O noemen we opvolgend a, b, c. Het is de bedoeling, dat O' in V_O komt te liggen, A' in V_A, B' in V_B en C' in V_C.
Neem even aan, dat we zo'n viervlak $O'A'B'C'$ geconstrueerd hebben. Trek door O' een lijn n' loodrecht op de vier evenwijdige vlakken. Projecteer de drie ribben

$O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ op die lijn n'. De drie projecties hebben dan de lengten a, b, c. Nu omgekeerd. Als we in het gegeven viervlak $OABC$ een lijn n door O kunnen maken zo, dat de projecties van OA, OB, OC op n *zich verhouden* als a, b, c, dan is $O'A'B'C'$ heel gemakkelijk te construeren. Daartoe plaatsen we $OABC$ met O in een willekeurig punt van V_O en zo, dat n loodrecht op de vier gegeven vlakken staat. Daarna vermenigvuldigen we $OABC$ ten opzichte van O met een zodanige factor dat het produktpunt van A in V_A komt. De produktpunten van B en C belanden dan automatisch in V_B en V_C.
Hiermee is de eerste fase van de analyse afgesloten. We kunnen de vier vlakken nu vergeten en onze aandacht in plaats daarvan richten op de lijn n.
Neem aan, dat we zo'n lijn n hebben. Kies een punt K op n en projecteer K op de lijnen OA, OB, OC. Noem de projecties K_a, K_b, K_c. Noem de projecties van A, B, C op n ook A_n, B_n, C_n. Nu is bijvoorbeeld de vierhoek $AA_n KK_a$ een koordenvierhoek (rechte hoeken bij A_n en bij K_a). Daaruit volgt $OK_a \cdot OA = OK \cdot OA_n$. Hieruit leiden we af

$$OK_a : OK_b : OK_c = OA_n/OA : OB_n/OB : OC_n/OC =$$
$$= a/OA : b/OB : c/OC$$

Punten K_a, K_b, K_c met deze eigenschap zijn gemakkelijk te maken. Richten we in hen loodvlakken op OA, OB, OC op, dan snijden die elkaar in een punt K. Verbinden we dat punt met O, dan hebben we een lijn n. Projecteren we OA, OB, OC daarop dan verhouden die projecties zich als a, b, c. En daarmee zijn we klaar.

Punten en prijzen

In de onderstaande tabel delen we voor elk van de teams mee het aantal punten, dat voor de zes vraagstukken apart werden behaald, en ook het totaal van die punten. We hebben die teams gerangschikt naar die totalen.
Te bedenken is daarbij, dat een team uit acht deelnemers moest bestaan. Het totaal van de punten per team kan dus maximaal 8(5 + 6 + 7 + 7 + 7 + 8) = 320 bedragen. Het Cubaanse team bestond echter slechts uit drie jongelui.

Sovjet Unie	36	42	35	48	54	55	270
Hongarije	35	41	43	52	40	52	263
D.D.R.	40	29	45	43	46	36	239
Roemenië	16	31	47	34	36	44	208
Engeland	35	32	21	30	31	30	179
Polen	35	23	14	19	26	43	160
Joegoslavië	22	32	1	37	10	34	136
Oostenrijk	24	31	16	48	7	10	136
Tsjechoslowakije	25	26	14	44	5	17	131
Bulgarije	26	19	10	28	8	29	120
Zweden	10	7	3	14	14	12	60
Nederland	10	15	0	18	1	7	51
Mongolia	6	20	0	13	0	9	48
Cuba	0	1	0	1	6	6	14

Er waren 8 eerste prijzen en die werden toegekend aan deelnemers, die het maximale aantal punten, dus 40 punten, behaalde. Dat waren drie Hongaren, twee Russen, een Pool, een Roemeen en . . . een 13-jarige jongeman uit de D.D.R.!
Een score tussen 29 en 40 punten was goed voor een tweede prijs en die werd aan 16 jongelui gegeven. Tenslotte waren er 30 derde prijzen voor deelnemers met een score tussen 18 en 30 punten.
Deze prijzen waren als volgt over de teams verdeeld:

Sovjet Unie	2	4	2	8
Hongarije	3	3	2	8
D.D.R.	1	3	4	8
Roemenië	1	3	1	5
Engeland		2	4	6
Polen	1	1	1	3
Joegoslavië			3	3
Oostenrijk			5	5
Tsjechoslowakije			4	4
Bulgarije			2	2
Zweden			2	2

Bovendien werden er nog drie extra-prijzen toegekend. Eén daarvan ging naar de Poolse deelnemer, die het vijfde vraagstuk zo fraai had opgelost. Een tweede werd toegekend aan een Roemeense deelnemer, die vraagstuk 4 wist te generaliseren. En de 13-jarige uit de D.D.R. kreeg de derde voor zijn jeugd.

Misschien is nog van belang hoe de behaalde punten over de zes opgaven verdeeld waren:

opgave 3: 249	opgave 2: 349
opgave 5: 284	opgave 6: 384
opgave 1: 320	opgave 4: 429

Organisatie en programma

De jury begon zijn werkzaamheden, na een korte ontvangst door de Minister van Onderwijs en Opvoeding, op 6 juli, in het Paleis voor Kultuur en Wetenschappen in Warschau. Deze werkzaamheden bestonden uit het kiezen van de opgaven uit de door de diverse landen ingezonden voorstellen, het bepalen van de officiële redactie daarvan in de talen Russisch, Duits, Engels, het vaststellen van het maximale aantal te behalen punten per vraagstuk, het vertalen en vermenigvuldigen in de landstalen van de deelnemers. Op 8 juli werd dit werk beëindigd.
Zondag 9 juli werd besteed aan een bezichtiging van het oude paleis der Poolse koningen en aan de reis naar Torun, de geboortestad van Copernicus. Inmiddels waren de deelnemende teams op 7 juli in Warschau aangekomen en op 8 juli naar Torun gebracht.
Op 10 en 11 juli waren de eigenlijke olympiade-zittingen. Ze duurden 4 en 4½ uren. De correctie en coördinatie van het geleverde werk werd op 14 juli voltooid. Op 15 juli konden juryleden en deelnemers dus gezamenlijk een tweedaagse trip beginnen, die in Warschau eindigde. Er werd in de fraaie middeleeuwse stad Poznan overnacht.

Op 17 juli werden de prijzen uitgereikt door de Minister, die tevoren aan de juryleden een zeer stijlvolle receptie had aangeboden. Terugreis op 18 juli.

Heen- en terugreis kwamen voor rekening van de uitzendende landen. Ons Departement van Onderwijs en Wetenschappen verleende daarvoor een subsidie. Het verblijf in Polen werd betaald door het Poolse Ministerie. De deelnemers werden in studentenhotels ondergebracht, de juryleden logeerden in 'gewone' hotels. Elk jurylid ontving een bedrag van ongeveer 2000 zloty voor zijn maaltijden en als zakgeld, de jongelui kregen een paar honderd zloty zakgeld. Deze bedragen waren toereikend.

Het Nederlandse team werd uitgekozen op grond van twee criteria. Alle deelnemers aan de tweede ronde van de nationale olympiade ontvingen 'lesbrieven' handelende over onderwerpen die voor de internationale olympiade van belang geacht mogen worden (kombinatoriek, getallenleer, ongelijkheden, enzovoorts). Zodra iemand zijn uitwerkingen van zo'n lesbrief ingezonden had, ontving hij een vervolgbrief samen met de correcties en opmerkingen bij die uitwerkingen. De deelname aan die activiteit was teleurstellend. De uitwerkingen kwamen in een zeer traag tempo binnen, zodat er in totaal niet meer dan drie verschillende brieven verzonden konden worden. Bovendien waren ze van vrij slechte kwaliteit. Op de eerste brief kwamen 25 reacties, van die 25 reageerden er 14 op de tweede brief, tenslotte leverde de derde brief slechts 6 antwoorden op.
De vier topfiguren van de nationale olympiade werden in elk geval voor de internationale olympiade uitgenodigd, ongeacht hun reacties op de lesbrieven. Voor de overige vier plaatsen was maatgevend een gecombineerde score, samengesteld uit de scores van de beide ronden van de nationale olympiade en uit de score op de lesbrieven.
In het volgende overzicht staat achtereenvolgens voor elk lid van het team vermeld:

- welke prijs hij in de nationale olympiade won (Arne Brentjes behoorde niet tot de prijswinnaars),
- de bovengenoemde gecombineerde score (Marinus Gerbrandy reageerde niet op de lesbrieven),
- zijn score in de internationale olympiade

Hans Lub	1	278	7
Marinus Gerbrandy	2		4
Rein Verhagen	3	137	7
Wim Pelt	4	143	7
Arne Brentjes		240	12
Ad Bax	6	206	5
Roel Visscher	5	204	7
Ton Stevenhagen	8	172	2

Voor het Nederlandse team hadden in de jury zitting A. van Tooren en A. Hoogendoorn. Evenals vorig jaar werd de heer Hoogendoorn onttrokken aan het team en ingeschakeld bij de jury werkzaamheden. Oorspronkelijk ging de 'tweede man' mee als begeleider van het team. Nu er kennelijk een andere gewoonte aan het ontstaan is lijkt het wenselijk aan de Nederlandse afvaardiging een 'derde man' toe te gaan voegen in het vervolg, die bij de jongens blijft. In sommige landen gebeurt dit al zo.
Hoewel er nog geen officiële uitnodiging is voor de XVde Internationale Wiskunde Olympiade zijn er voldoende redenen aanwezig om aan te nemen, dat die in 1973 in Bulgarije gehouden zal worden.

Staatsexamens 1972

Uit de verslagen van de verschillende examens laten we hieronder de gedeelten volgen van de subcommissies-wiskunde.

Gymnasium:

Het gemiddelde van de door de A-kandidaten behaalde cijfers voor algebra bedraagt dit jaar 5,0 en voor meetkunde 5,1. De gemiddelden voor deze vakken waren vorig jaar resp. 5,3 en 5,2. De gemiddelden van de cijfers voor de B-kandidaten waren dit jaar als volgt: voor algebra 5,8 (vorig jaar 5,9), voor stereometrie 5,7 (vorig jaar 5,4) en voor goniometrie en analytische meetkunde 5,6 (vorig jaar 5,6). Toekomstige kandidaten wordt aangeraden zich goed op de hoogte te stellen van de exameneisen en van de opmerkingen in de examenverslagen van de voorafgaande jaren.

HBS-A:

Een opmerkelijk verschil met vorige jaren is gelegen in het feit dat de kandidaten voor het examen hbs-A niet meer via de avondlycea, maar via andere opleidingen komen. Hierbij is een mondelinge voorbereiding (controle) voor de kandidaten moeilijk te verwezenlijken, zodat mede tengevolge hiervan zowel het schriftelijk als het mondeling examen zeer mager tot slecht zijn te noemen; ondanks de bijzonder soepele normen bij de beoordeling is het aantal zeer lage cijfers opvallend hoog. Er zijn bij het mondelinge examen enkele kandidaten, die zelfstandig kunnen werken; de meesten echter kunnen alléén iets presteren, als de examinator hen met veel geduld op het spoor zet; het is dan ook niet te verwonderen, dat bij het schriftelijk examen deze kandidaten geen enkel vraagstuk zelfstandig kunnen maken. De toekomstige kandidaten wordt aangeraden op de volgende punten te letten:

a juiste kennis in definities, formules en van de daarin voorkomende grootheden;
b een grondige voorbereiding, juist in *eenvoudige* zaken;
c juiste kennis van de goniometrische verhoudingen (formules) en de toepassing hiervan op eenvoudige meetkundige figuren;
d het op juiste wijze interpreteren van gegevens in meetkundige figuren.

HBS-B:

Algebra

Ieder jaar opnieuw moet de sub-commissie constateren dat de opmerkingen door haar gemaakt in vorige examenverslagen door te veel kandidaten niet of nauwelijks ter harte worden genomen, of dat deze opmerkingen via de opleiders niet bij de kandidaat terecht komen. Dit blijkt zowel uit het gemaakte schriftelijk werk als tijdens de mondelinge examens.
Het schriftelijk onderdeel van het examen was dit jaar zeer slecht gemaakt. Ruim 60% van de cijfers waren niet voldoende. Een onvoldoende voorbereiding op het examen en een gebrek aan kennis van veel elementaire zaken zijn hiervan de oorzaak.

De mondelinge examens geven aanleiding tot het maken van de volgende opmerkingen:

- Het kost de kandidaat vaak zeer veel moeite om van eenvoudige functies als $x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, 2^x, {}^g\log x$ de grafiek te tekenen.
  Over existentievoorwaarden stapt men te gemakkelijk heen of nog erger, deze zijn vaak onbekend.
- Ongelijkheden vervangt men vaak door vergelijkingen, waarna men, na oplossing, de wortels zonder nadenken voorziet van de tekens $>$ en $<$. Bij logaritmische ongelijkheden is men vaak niet op de

hoogte van de invloed van het grondgetal. Veel problemen bij het oplossen van ongelijkheden voorkomt men als men weet dat $2^x > 0$ voor alle x.

- Men hoort maar al te dikwijls slordige en onvolledige definities van rekenkundige en meetkundige rijen. Het is voor de examinatoren ontmoedigend telkens weer te moeten constateren dat de formules voor t_k en s_k niet gekend worden, evenals het feit dat $s = \lim_{k \to \infty} s_k$.
- Dat $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ = onbepaald $\Leftrightarrow b = 0 \wedge a = 0$ en $\frac{a}{b}$ = niet gedefinieerd $\Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b = 0$ is velen niet bekend. Veel kostbare tijd gaat op een mondeling examen verloren eer men de kandidaat in deze kwesties op het goede spoor heeft.
- Nog altijd zijn er zeer vele kandidaten die aan de wortels van $f'(x) = 0$ de conclusie verbinden dat de grafiek van $f(x)$ voor deze waarden een maximum of minimum heeft.
  Men dient te weten dat voor het optreden van een extreem voor $x = a$ nodig is dat $f(a)$ gedefinieerd is en bovendien $f'(x)$ van teken wisselt voor $x = a$.

Stereometrie

Schriftelijk

Het schriftelijk gedeelte geeft geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen. Wel blijkt, dat de kandidaten te weinig routine bezitten in het maken van vraagstukken.
De commissie beveelt toekomstige kandidaten aan, van tijd tot tijd examenvraagstukken *volledig* uit te werken, zodat ze zonder meer als examenwerk ingeleverd zouden kunnen worden.

Mondeling

In het algemeen kan gezegd worden, dat de kandidaten zich redelijk hebben voorbereid. In enkele gevallen heeft de commissie zich echter verbaasd afgevraagd, waarom een kandidaat op het mondeling examen verscheen. Zonder een degelijke en (in tijd gemeten) niet te krappe voorbereiding is deelname aan het examen zinloos. Nog een algemene opmerking: men dient zich te oefenen in ruimtelijk inzicht, door inderdaad *de ruimte* te gebruiken en niet alleen door stereometrische figuren te bestuderen!
Nu enkele detailopmerkingen aan de hand van de ervaringen van de commissie tijdens het mondeling examen:

1 Hoewel de begrippen afstand van twee kruisende rechte lijnen en hoek tussen twee kruisende rechte lijnen vaak beide bekend waren, werden deze begrippen bij constructies in figuren nogal eens door elkaar gehaald.
2 Vraagstukken, waarbij bollen te pas kwamen, gaven soms aanleiding tot moeilijkheden. Dit komt, omdat de kandidaat dan de bol persé wil bekijken, in plaats van zich te bepalen tot eigenschappen van middelpunt, raaklijnen e.d.
3 Het is voor een aantal kandidaten lastig, eenvoudige planimetrische eigenschappen (b.v. die van een ruit of een gelijkzijdige driehoek) snel in een stereometrische figuur te overzien.
4 Een aantal kandidaten laat te snel een opgezette redenering los, menende, dat deze toch op niets zal uitlopen! Men moet een (overwogen) plan uitwerken, tenzij men op een onmogelijkheid stuit.
5 Berekeningen, die uitgevoerd moeten worden, nadat een constructie is gemaakt, dienen ook op deze constructies gebaseerd te zijn. Sommige kandidaten construeren b.v. een bepaald lijnstuk en kunnen dan de lengte ervan niet bepalen, omdat ze de hele manier, waarop ze aan het lijnstuk gekomen zijn, buiten beschouwing laten.

Slotopmerking

De kandidaten dienen zich te oefenen in een correcte formulering van hun gedachten. Waarschijnlijk wreekt zich in dit opzicht een opleiding, die volledig zonder mondeling contact tot stand kwam.

Goniometrie en Analytische meetkunde

Schriftelijk Goniometrie

Het bepalen van een primitieve functie van $\sin^2 x$ en $\cos^2 x$ was voor vele kandidaten een onoverkomelijke moeilijkheid. De resultaten van dit gedeelte van het schriftelijk werk waren dan ook niet erg bevredigend.

Mondeling Goniometrie

Opnieuw moest de subcommissie constateren dat een correct gebruik van de afgeleide functie bij het onderzoek naar de extreme waarden slechts bij enkele kandidaten mocht worden waargenomen. Bij de toepassing van goniometrische functies en hun afgeleide functies op hoekberekeningen is het noodzakelijk de radiaal als hoekmaat te hanteren. Het gebruik van graden is in dit verband een onvergeeflijke lichtzinnigheid. Slechts weinig kandidaten waren hiervan tijdens het examen te overtuigen.

Schriftelijk Analytische meetkunde

Hoewel de opgaven voor het schriftelijk werk zeker niet bijzonder moeilijk waren viel het resultaat niet mee.

Mondeling Analytische meetkunde

Het is de subcommissie opgevallen dat zeer veel kandidaten geen onderscheid maken tussen een verzameling lijnen (cirkels) en een lijnenbundel (cirkelbundel).
Onzorgvuldig woordgebruik zoals:
- een punt invullen in een vergelijking
- het middelpunt van de parabool
- de richtingscoëfficiënt in de hoek tussen .....
- de parameter is de onbekende
- de onbekende oplossen

behoorde wederom niet tot de uitzonderingen.

Voor de overige, eveneens jaarlijks terugkerende misgrepen verwijst de subcommissie naar de examenverslagen van de jaren 1969, 1970 en 1971.
De subcommissie betreurt het dat te weinig kandidaten de in deze verslagen gesignaleerde feiten ter harte nemen.

ARTIKEL 3

Het lijkt de commissie noodzakelijk nog eens de eisen voor het staatsexamen 'Art. 3' voor het laatste examen in '73 op te nemen.

Inzicht en kennis van:

Algebra:

Positieve en negatieve getallen;
machten; breuken;
merkwaardige produkten;
ontbinding in factoren;
wortelvormen;
vergelijkingen, functies, ongelijkheden, grafieken van de 1e en 2e graad;
vergelijkingen met meerdere onbekenden van de 1e graad.

Vlakke meetkunde:

Eigenschappen van driehoeken en vierhoeken;
constructies;
verzamelingen, merkwaardige lijnen;
congruentie;
gelijkvormigheid;
oppervlakten;
eenvoudige eigenschappen van cirkels;
om- en ingeschreven cirkels;
meten van hoeken door bogen.

Stereometrie:

Beginselen;
ligging van lijnen en vlakken;
hoeken, afstanden;
doorsneden;
viervlak.
Vaardigheid in het toepassen op eenvoudige vraagstukken van bovengenoemde onderwerpen.

Er wordt alleen mondeling geëxamineerd.

HAVO

De techniek van het differentiëren werd in redelijke mate beheerst.

Het viel op, dat de meeste kandidaten bij het differentiëren van bijv. $\frac{1}{x-2}$ grijpen naar de quotiëntregel.

De uiterste waarden werden nu algemeen berekend door te letten op het tekenverloop van de afgeleide functie. De opmerkingen daarover door een vorige commissie gemaakt, hebben blijkbaar gunstig effect opgeleverd. Een definitie van 'afgeleide functie' kon slechts zelden worden gegeven. En ook kon zelden met succes gevraagd worden naar het bewijs, waarom de afgeleide van b.v. x^2 wordt $2x$.
In de analytische meetkunde werden de formules voor raaklijnvergelijkingen vlot opgeschreven, maar veelal had men geen idee, hoe deze formules bewezen worden. Vele kandidaten hadden moeite met het vinden van een verzameling, waarbij een parameter geëlimineerd moet worden.
In de goniometrie viel het op, dat verscheidene kandidaten het begrip radiaal niet behoorlijk weten te definiëren.
Aan toekomstige kandidaten wordt aangeraden aandacht te schenken aan definities en aan de bewijzen uit de te bestuderen theorie.

I.O.W.O.

Een nieuwe uitgave ten behoeve van de statistiek in de V.W.O.-bovenbouw

Ervaringen van één jaar experimenteren met het boek 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek' van H. Freudenthal, A. D. Nijdam en J. J. Wouters zijn door een werkgroep, ingesteld door het I.O.W.O., verwerkt tot een boek met een geheel nieuwe opzet. Zoals de titel van dit nieuwe boek 'Statistiek en Kansrekening' al doet vermoeden is de statistiek nu op de voorgrond geplaatst, terwijl de kansrekening beperkt blijft tot die onderwerpen die voor een goed begrip van de behandelde mathematische statistiek onontbeerlijk zijn.

Het boek bevat zes hoofdstukken. In het eerste worden de probleemgebieden van de statistiek voorzover ze in het boek behandeld worden aan de hand van voorbeelden geïntroduceerd en enkele problemen worden reeds met elementaire hulpmiddelen ruwweg opgelost. Hoofdstuk 2 bevat de beginselen van de kansrekening en hoofdstuk 3 enkele veel voorkomende kansverdelingen. Hierna volgt in hoofdstuk 4 een zodanige behandeling van enkele statistische onderwerpen, zoals hypothesetoetsen en betrouwbaarheidsintervallen, dat als voorkennis slechts de binomiale kansverdeling vereist is. Hoofdstuk 5 gaat in op de verwachting en de standaardafwijking van een stochast, waardoor in hoofdstuk 6 het gebruik van de normale verdeling bij de voortgezette behandeling van statistische onderwerpen mogelijk gemaakt wordt.

Aan elk hoofdstuk zijn overzichten en herhalingsopgaven toegevoegd. De laatste zijn voornamelijk afkomstig van proefwerken, die op de experimenterende scholen zijn gebruikt.

Deze tekst, die in principe geschreven is voor de scholen die meedoen aan het experiment Statistiek en Kansrekening, kan het nu lopende schooljaar in de vijfde klas en het volgende schooljaar in de zesde klas v.w.o. nog gebruikt worden voor het keuzeonderwerp in het vak wiskunde-II.

Het boek wordt alleen op aanvraag geleverd tegen kostprijs: *f* 6,– per exemplaar. Bestellingen kunt U schriftelijk richten tot: I.O.W.O., Tiberdreef 4, Utrecht met vermelding van *'Bestelling S. en K.'* in de linker bovenhoek van de enveloppe of briefkaart.

Ten behoeve van de gebruikers wordt momenteel gewerkt aan 'Kanttekeningen bij Statistiek en Kansrekening voor het v.w.o.', waarin worden opgenomen: antwoorden op de vragen in de tekst en uitkomsten van de opgaven, lessuggesties en opmerkingen, modellen voor transparanten, leerlingenpraktika en nadere beschouwingen. Naar verwachting zullen deze kanttekeningen in januari 1974 gereed zijn.

Namens het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs
Drs. A. D. Nijdam (medewerker v.w.o.)

Boekbespreking

Roger W. Carter, *Simple Groups of Lie Type,* John Wiley & Sons, XVI, 328 pp., £ 7.50.

Het groepenbegrip heeft zich historisch gezien op verschillende gebieden van de wiskunde ontwikkeld, zoals in de theorie van de algebraïsche vergelijkingen (Galoistheorie), in de theorie van de automorfe functies (Discontinue transformatiegroepen), in de theorie van de differentiaalvergelijkingen (Continue groepen). Op deze wijze hebben zich vrij onafhankelijk van elkaar verschillende hoofdstukken van 'de groepentheorie' ontwikkeld. Lange tijd heeft er niet meer dan een oppervlakkige gelijkenis bestaan tussen de theorie van de continue groepen (tegenwoordig Lie groepen genaamd) en die van de discrete groepen; van een wederzijdse beïnvloeding door resultaten of methoden was eigenlijk geen sprake. Pas geleidelijk aan is er sinds de dertiger jaren meer wisselwerking tussen deze twee gebieden ontstaan. Zo is H. Weyl bij zijn behandeling van de representatie theorie der compacte groepen door de overeenkomstige theorie voor de eindige groepen geïnspireerd. Omgekeerd is herhaaldelijk met minder of meer succes gepoogd methoden uit de theorie der Lie groepen over te dragen op het gebied der discrete groepen. Tot de successen moet ongetwijfeld gerekend worden het overdragen van de classificatietheorie van de enkelvoudige Lie groepen op groepen lineaire transformaties van vectorruimten over een willekeurig grondlichaam door C. Chevalley. Voor eindige lichamen levert dit een reeks typen enkelvoudige groepen waaronder voorheen nog niet bekende typen voorkomen. Het onderhavige boek gaat hierover en brengt zelfs betrekkelijk recente resultaten. Voor een goed begrip van het één en ander is enige kennis van de classificatietheorie van enkelvoudige Lie algebra's gewenst. Alhoewel deze door de auteur op beknopte wijze wordt uiteengezet, is wellicht enige aanvullende lectuur gewenst voor degenen die hier voor het eerst mee kennis maken. (De in de literatuuropgave genoemde boekjes van Samelson [1] of Serre [3] kunnen daarbij van pas komen.) Overigens is het boek te lezen met een geringe kennis van algebra en lineaire algebra. Wèl wordt van de lezer nogal wat inzet gevergd, maar degenen die onder de bekoring komen van de hier behandelde zaken zullen die wellicht graag opbrengen.

W. T. van Est

B. Artmann, *Eine Einführung in die Algebra,* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973, ingenaaid, 228 pp., DM 25,–.

Een aan de universiteit van Giessen gedane poging, om toekomstige wiskundeleraren althans een idee te geven van wat moderne algebra is, vormde de aanleiding tot dit boekje, dat ook bruikbaar zal zijn voor hen, die in het verleden toekomstige wiskundeleraren waren en hun gebrek aan algebrakennis als een gemis voelen. 'Unter ständiger Berücksichtigung der ganzen und der rationalen Zahlen' (zoals de ondertitel luidt) bespreekt de auteur groepen, ringen en lichamen, en geeft uitvoerige bewijzen van de meest fundamentele deze begrippen betreffende stellingen, met voorbeelden voornamelijk ontleend aan de elementaire getaltheorie. Talrijke opgaven stellen de lezer in staat zijn meesterschap over de stof te toetsen, temeer daar de oplossingen door de auteur zijn achtergehouden. Van de eenentachtig afbeeldingen zijn er negenenzeventig ter lering en twee ten vermaak; bij het vervaardigen van Abb. 63 (pag. 162) heeft de kunstenaar zich verbazende vrijheden veroorloofd. Aanbevolen voor de oningewijde.

H. W. Lenstra Jr.

Dr. H. J. Schneider - D. Jurksch, *Programmierung von Datenverarbeitungsanlagen*, Band 1225/1225a, Sammlung Göschen 1970.

In deze verzameling zijn reeds vele kleine handige boekjes verschenen. Dit geschrift is bestemd voor degene die belangstelling heeft voor de programmeertalen Algol 60 en Fortran.
In kort bestek worden de volgende onderwerpen aan de orde gesteld: programmavoorbereiding, gegevens over ALGOL 60 en FORTRAN, deelprogramma's, aangevuld met enkele voorbeelden die voor wiskundigen interessant zijn: vectoroptelling, matrixvermenigvuldiging, oplossing van kwadratische vergelijkingen en worteltrekking.

B. J. Westerhof

Dr. P. M. v. Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring, *Van A tot Z*, deel V5a en deel V5b voor de vijfde klas V.W.O. Deel V5a 229 blz.; deel V5b 215 blz. Beide delen *f* 15,90, uitg. J. Muusses, Purmerend.

In deze delen wordt ongeveer tweederde deel van de leerstof van wiskunde I respectievelijk wiskunde II behandeld. In deel V5a komen ter sprake de onderwerpen differentiaal- en integraalrekening, relaties en functies, logaritmische en exponentiële functies, goniometrische functies, kansrekening en lijnelementenveld.
In deel V5b: verzamelingen en afstanden in de R_2 en R_3, formele logica, groepen, analytische meetkunde in de ruimte, afbeeldingen in R_2 en R_3, raaklijn en raakvlak in R_2 en R_3.
De uitgave is een experimentele uitgave. Er is gebruik gemaakt van een schrijfmachinelettertype, wat tot gevolg heeft gehad dat a) afgeweken moest worden van de bij deze serie gebruikelijke vectornotatie, b) een en ander minder overzichtelijk is geworden, c) de boeken dikker zijn geworden dan met het oorspronkelijke lettertype het geval zou zijn geweest.
De delen sluiten aan op de voorgaande van deze serie, terwijl ook een overstap van H.A.V.O. naar V.W.O. in dit systeem goed mogelijk is.
De boeken zijn wetenschappelijk verantwoord opgezet, doch m.i. soms te moeilijk. B.v. de functies cosinus en sinus worden gedefinieerd als inprodukten van eenheidsvectoren, daarna wordt bewezen dat ze geschreven kunnen worden als verhoudingen van lijnstukken. De beoogde vereenvoudiging wordt hier volgens mij beslist niet bereikt.
Aan het eind van ieder hoofdstuk staat een overzicht van de behandelde stof. Aan het eind van het boek een samenvatting die bijna letterlijk hetzelfde is als de afzonderlijke overzichten. Hierdoor hadden de delen 21 blz. resp. 30 blz. minder kunnen bevatten.

Mahieu

P. N. Corlett and J. D. Tinsley, *Practical Programming*, with additional chapters by R. A. Court, Cambridge University Press 1968, 1972. 264 pagina's, prijs £1.50.

Dit boek bevat een inleidende kursus in het programmeren. Een korte uiteenzetting wordt gegeven van basistermen en begrippen en de belangrijkste grammatikale regels van de computertaal ALGOL worden opgesomd. Voorbeelden van programma's volgen al heel snel. Deze voorbeelden, veelvuldig toegelicht met ALGOL teksten en flow diagrams, vormen in het boek de hoofdmoot. Naarmate men ze doorwerkt raakt men verder ingevoerd in de belangrijkste technieken van het programmeren, bijvoorbeeld het gebruik van arrays, loops en procedures (FORTRAN: subroutines).
De meeste voorbeelden zijn van numerieke aard. Dat ligt ook voor de hand met een typische rekentaal als ALGOL. Om er enkele van te noemen: bepaling van priemgetallen, binomiaalcoëfficiënten, grootste gemene delers; het oplossen van tweede en derde graads-vergelijkingen, het uitvoeren van matrixbewerkingen. In de tweede druk zijn nog twee hoofdstukken toegevoegd over een andere computertaal:

FORTRAN. Een boekhoudkundig voorbeeld maakt duidelijk dat FORTRAN zich ook leent voor het oplossen van niet louter numerieke problemen.
Voor het middelbaar onderwijs biedt de opzet van het boek aantrekkelijke mogelijkheden. De tientallen voorbeelden, bondig geformuleerd en ieder op zich toch een betrekkelijk afgerond geheel vormend, prikkelen de lezer om de verschillende onderdelen ervan (programma, float diagram, begeleidende tekst, wiskundige bewijsvoering) met elkaar in verband te brengen. Ieder hoofdstuk eindigt met een aantal vraagstukken. Niet noodzakelijk, maar didaktisch wel belangrijk voor het welslagen van de kursus is, dat de deelnemers in de gelegenheid worden gesteld zelf eens een programma in de computer te testen. In het engelse systeem van middelbaar onderwijs heeft het boek z'n nut al bewezen.

J. Creyghton

Prof. dr. J. Hemelrijk, *Statistiek, te pas en te onpas,* Kluwer, 1972.

Dit boek bevat de tekst van een serie TV-lessen, die Teleac in 1969 en 1970 heeft uitgezonden. In evenveel hoofdstukken wordt de lezer eerst met onderwerpen uit de beschrijvende statistiek in kennis gebracht, daarna komt het kansbegrip aan de orde, vervolgens steekproeven, betrouwbaarheid van toetsen en de normale verdeling.
Aan de hand van diverse goedgekozen voorbeelden slaagt de auteur erin begrip te kweken voor een statistische wijze van denken en toont hij aan dat het trekken van conclusies een uiterst gevaarlijke bezigheid kan zijn.
Het boek leest erg plezierig en geeft een goede inleiding voor allen die het terrein van de statistiek nog nimmer betraden.
Uitstekend geschikt voor de leerlingenbibliotheek.

B. J. Westerhof

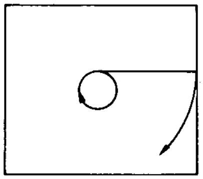
Ontvangen boeken

A. Scholz - B. Schoenberg, *Einführung in die Zahlentheorie,* Sammlung Göschen 5131, de Gruyter en Co., Berlijn 1973, 128 blz., 5e dr., DM 9.80.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek

Recreatie

302. Gegeven is een rechthoekig weiland met zijden 50 en 45 m. In dit weiland is een verticale cilinder aangebracht waaromheen een touw gewonden is in de richting van de pijl. Een deel van het touw is vrij. Aan het uiteinde daarvan is een puntvormige geit bevestigd. Als deze het touw gestrekt houdt en zich in de richting van de rechter pijl voortbeweegt, beschrijft zij een weg die de vier zijden van het weiland raakt. Het touw is in totaal 40 m lang.
Gevraagd wordt:
de afstanden van de as van de cilinder tot de zijden van het weiland,
de straal van de cilinder,
het punt waar het begin van het touw aan de cilinder bevestigd is,
de grootte van het gedeelte van het weiland dat de geit kan begrazen.
(naar een opgave van Ir. J.H. van der Vlis)



303. Gevraagd wordt drie verschillende rechthoekige driehoeken te vinden met gelijke en minimale omtrek waarvan de lengten van de zijden geheel zijn. (B. Kootstra)

Oplossingen

300. Een vierkant moet in vijf delen verdeeld worden die aan elkaar gepast kunnen worden tot twee congruente gelijkzijdige driehoeken.

Begin met een gelijkzijdige driehoek ARQ zo te tekenen, dat $PQ = AD$ en $PQ \,//\, AD$. (Dit is mogelijk, want als $R = C$, $\Delta\, ARQ$ gelijkzijdig en $PQ \,//\, AD$, dan is $PQ > AD$, en als $R = B$ is $PQ < AD$.)
DSP ontstaat uit AQR door translatie. De nummering geeft nu aan, hoe de vijf stukken tot de twee congruente gelijkzijdige driehoeken ARQ en DTP zijn samen te voegen.
Nu we eenmaal weten, dat het kan, is de constructie gemakkelijk uitvoerbaar. We bepalen R zo, dat

$$\tfrac{1}{2} AR^2 \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} AD^2$$

en de rest gaat vanzelf.

301. Men verdeelt 7 rode, 3 witte, 8 blauwe en 2 oranje fiches onder twee personen zo, dat elk er tien krijgt. Wat is de kans dat, indien de één een k-tal fiches van een bepaalde kleur krijgt, de ander ook een k-tal fiches van een bepaalde (natuurlijk niet noodzakelijk dezelfde) kleur krijgt? ($k > 0$).
De volgende verdelingen voldoen aan de eis:

rood	wit	blauw	oranje	aantal mogelijkheden
7	2	1	0	3 · 8
o	1	7	2	
6	1	2	1	7 · 3 · 28 · 2
1	2	6	1	
5	0	3	2	21 · 56
2	3	5	0	
6	1	2	0 of 2	7 · 3 · 28 · 2
1	2	6	2 of 0	
4	3	4	1	35 · 70 · 2
3	0	4	1	

Het totaal aantal mogelijkheden is $\binom{20}{10}$.
De kans is nu wel uit te rekenen.

Mathematica & Paedagogia

Evenals vorige jaren bestaat voor de abonnees op Euclides de gelegenheid tegen gereduceerde prijs een abonnement te verkrijgen op het Belgische tijdschrift Mathematica & Paedagogia, orgaan van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren.
Wie reeds abonnee is en niet voor 1 december mij bericht, dat hij het abonnement wenst te beëindigen, geef ik voor het komende jaar weer als abonnee op. Men kan zich als nieuw abonnee opgeven door storting van *f* 15,— op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Oosterbeek, voor 1 december. Ook de andere abonnees wordt verzocht dit bedrag voor 1 december over te maken. Dringend verzoek geen gelden naar België te zenden, om dubbele betaling te vermijden.

P.G.J. Vredenduin
Van Wassenaersheuvel 73
Oosterbeek

Mededeling uit België

Op 21 juni j.l. heeft de Vlaamse Onderwijsminister, prof. dr. W. Calewaert, aan de pers meegedeeld dat de 'moderne wiskunde' met ingang van 1 september 1977 verplicht wordt in het *basisonderwijs.*

(meegedeeld door Dr. R. Holvoet)

Bericht van de C.M.L.N./C.M.L.W.

In het kader van de coördinatie tussen de leerplannen wiskunde en natuurkunde in het v.w.o. overwegen de C.M.L.N. en de C.M.L.W. een conferentie te beleggen voor wiskunde- en natuurkundeleraren. Alvorens hiertoe definitief te besluiten organiseren de beide commissies in januari 1974 een kleine

proefconferentie coördinatie wis- en natuurkunde v.w.o.

Deze conferentie bevat o.m. de volgende aspecten:
1 Wederzijdse informatie over de vernieuwingen in de beide leerplannen.
2 Discussie over het gebruik van nieuw ingevoerde wiskundige begrippen en methoden in de natuurkunde.
3 Verbetering in de afstemming van beide leerplannen op elkaar.
4 De samenwerking tussen de wis- en natuurkundesecties op de scholen.

Op de conferentie zullen o.a. de volgende voordrachten gehouden worden:
- prof. dr. F. van der Blij: Differentiaalrekening in een vroeg stadium en differentiaalvergelijkingen;
- dr. P. M. van Hiele : Systeemscheiding en transfer.

De proefconferentie zal in het centrum van het land worden gehouden op 10, 11 en 12 januari 1974, telkens van 9 tot 17.00 uur. Tussen de middag wordt de deelnemers een lunch aangeboden. Reiskosten openbaar vervoer tweede klas worden vergoed. Eventuele overnachtingskosten worden *niet* vergoed.

Inschrijving voor deze conferentie is alleen mogelijk voor combinaties van een wiskunde- met een natuurkundeleraar(es) aan dezelfde school.
Bij overinschrijving zal een deel der ingeschrevenen verwezen worden naar de grote conferentie.

De inschrijving moet voor 15 december 1973 worden gericht aan het I.O.W.O., Tiberdreef 4, Utrecht, t.a.v. Mej. I. C. Leenstra.

Indien voor deelname buitengewoon verlof moet worden gegeven dient het bevoegd gezag der school dit ex I-C7 van het RPB-WVO te worden aangevraagd bij de Directie Onderwijsvernieuwing en Planning van het departement met vermelding van de reden waarom omzetting van het lesrooster niet mogelijk is.

Namens de C.M.L.N. en de C.M.L.W.
A. D. Nijdam,
medewerker v.w.o.
I.O.W.O.

INHOUD